

Toute réponse non justifiée n'apportera pas de point. Le barème est indicatif.

Exercice 1 : Questions de cours

4 Points

Répondez aux questions suivantes en **justifiant brièvement** vos réponses (toute réponse non justifiée vaut 0 points) :

- 1) Soit le langage  $FACT = \{ \langle M, w \rangle \mid M \text{ écrit les facteurs premiers de l'entier codé par } w \text{ puis s'arrête} \}$ . Ce langage est-il décidable ?
- 2) Soit le langage  $PREMS = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ a un nombre premier d'états} \}$ . Ce langage est-il décidable ?
- 3) On considère les machines de Turing *exponentiellement bornées* qui utilisent un espace bornée par  $2^{|w|}$  où  $w$  est l'entrée de la machine. Le problème *HALT* restreint aux machines exponentiellement bornées est-il décidable ?
- 4) On sait que  $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{NP} \subseteq \mathbf{PSPACE} \subseteq \mathbf{EXPTIME}$ . Donnez un cas d'inclusion stricte dans cette suite d'inclusions.

Exercice 2 : Graphes-arêtes et complexité

3 Points

Soit  $G = (V, E)$  un graphe simple non orienté où  $V$  est l'ensemble des sommets et  $E$  l'ensemble des arêtes. On appelle le graphe-arête de  $G$ , noté  $G^* = (V^*, E^*)$ , le graphe tel que  $V^* = E$  et  $[e_1, e_2] \in E^*$  ssi  $e_1 \in E, e_2 \in E$  et  $e_1$  et  $e_2$  ont un sommet en commun dans  $G$ . Informellement, il s'agit de remplacer les sommets par les arêtes et de les lier si elles étaient adjacentes. On dit qu'un graphe  $H$  est un graphe-arête s'il existe un graphe  $G$  tel que  $H$  est le graphe-arête de  $G$ . Exemple :

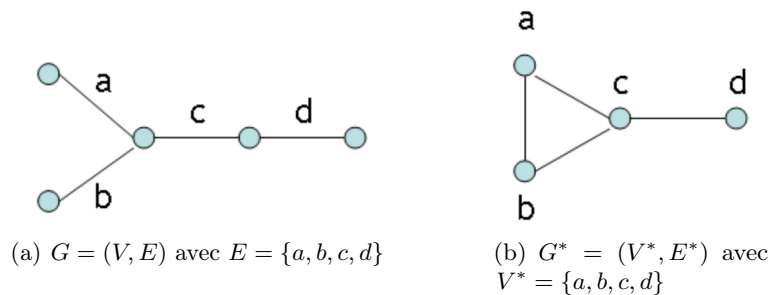


FIGURE 1 – Un exemple de graphe  $G$  et son graphe-arête  $G^*$ .

Un cycle eulérien dans un graphe est un cycle qui passe par toutes les arêtes une et une seule fois (mais peut passer plusieurs fois par un sommet). Un cycle hamiltonien est un cycle qui passe une et une seule fois par tous les sommets. Soient les problèmes suivants :

**ENTRÉE** : Un graphe non orienté  $G$ .  
**QUESTION** : Existe-t-il un cycle eulérien dans  $G$  ?

**ENTRÉE** : Un graphe non orienté  $G$ .  
**QUESTION** : Existe-t-il un cycle hamiltonien dans  $G$  ?

On admettra que CYCLE EULÉRIEN est dans  $\mathbf{P}$ .

- 1) Dessiner le graphe-arête de  $K_4$ , le graphe complet à quatre sommets.

- 2)  $K_4$  est-il eulérien ?
- 3) Le graphe-arête de  $K_4$  (noté  $K_4^*$ ) est-il hamiltonien ?
- 4) Soit  $C$  un cycle eulérien dans  $G$ . A quoi correspond-il dans  $G^*$  ?
- 5) Que peut-on déduire de la classe de complexité de CYCLE HAMILTONIEN restreint aux graphes-arêtes ?

### Exercice 3 : Décidabilité et indécidabilité

6 Points

On fixe un alphabet  $A$  fini. On note  $\Sigma$  un second alphabet fini qui permet de coder les machines de Turing travaillant sur le premier alphabet  $A$ . Étant donnée une telle machine  $M$ , on note  $\langle M \rangle \in \Sigma^*$  le codage de  $M$ . Si  $X$  est un langage de  $\Sigma^*$ , on note  $\bar{X}$  son complémentaire, c'est-à-dire  $\bar{X} = \Sigma^* \setminus X$ . Enfin, on rappelle qu'un langage  $X \subseteq \Sigma^*$  est *co-semi-décidable* si  $\bar{X}$  est semi-décidable.

On considère un langage  $L \subseteq A^*$ . Soit  $K \subseteq \Sigma^*$  le langage suivant :

$$K = \{\langle M \rangle \mid L(M) = L\}.$$

- 1) On suppose que  $L$  n'est pas semi-décidable. Le langage  $K$  est-il décidable ?
  - 2) On suppose que  $L = \emptyset$ . Le langage  $K$  est-il co-semi-décidable ? Est-il semi-décidable ?
- Dans les 3 questions suivantes, on suppose que  $L$  est semi-décidable.
- 3) On suppose que  $L \neq \emptyset$ . Montrer que UNIV se réduit à  $K$ . Que peut-on en déduire sur  $K$  ?
  - 4) On suppose que  $L = \Sigma^*$ . Montrer que  $K$  n'est pas semi-décidable.

**Indication.** Vous pouvez vous inspirer de la preuve d'indécidabilité de l'arrêt universel.

- 5) On suppose que  $L \neq \emptyset$  et  $L \neq \Sigma^*$  (et toujours, que  $L$  est semi-décidable). Étant donnée une machine de Turing  $M$  et un mot  $w$ , construire une machine  $M'$  telle que  $L(M') = \Sigma^*$  si  $M$  accepte  $w$  et  $L(M') = L$  sinon. Que peut-on en déduire sur  $K$  ?

### Exercice 4 : Transducteurs

5 Points

On considère un alphabet fini  $A$  ayant au moins 2 lettres. On appelle *transducteur* un tuple  $T = (Q, q_I, F, \delta)$  où  $Q$  est un ensemble fini d'états,  $q_I \in Q$  un état initial,  $F \subseteq Q$  un ensemble d'états finaux et  $\delta \subseteq Q \times A^* \times A^* \times Q$  un ensemble fini de transitions.

Un tel transducteur  $T = (Q, q_I, F, \delta)$  accepte des paires de mots  $(u, u') \in A^* \times A^*$ . Une telle paire  $(u, u') \in A^* \times A^*$  est acceptée par  $T$  quand il existe une séquence de la forme suivante :

$$q_1 \xrightarrow{(x_1, x'_1)} q_2 \xrightarrow{(x_2, x'_2)} \dots q_{n-1} \xrightarrow{(x_{n-1}, x'_{n-1})} q_n \quad \text{avec } n \geq 1 \text{ et,}$$

- $q_1, \dots, q_n \in Q$  sont des états tels que  $q_1 = q_I$  et  $q_n \in F$ .
- Pour tout  $i$ ,  $(x_i, x'_i)$  est une paire dans  $A^* \times A^*$  qui satisfait  $(q_i, x_i, x'_i, q_{i+1}) \in \delta$ .
- $u = x_1 \dots x_n$  et  $u' = x'_1 \dots x'_n$ .

- 1) Montrer que le problème suivant est indécidable.

#### Identité non vide

**Entrée :** Un transducteur  $T = (Q, q_I, F, \delta)$ .

**Question :** Existe-t-il un mot  $u \in A^*$  **non vide** tel que la paire  $(u, u)$  est acceptée par  $T$  ?

- 2) Même question pour le problème dans lequel on supprime la restriction que le mot  $u$  est non vide.

On considère des grammaires qui peuvent utiliser des règles plus puissantes que les grammaires hors-contexte. On fixe un alphabet  $A = \{a, b, c\}$  pour l'exercice.

Une *grammaire étendue* est un tuple  $G = (V, S, R)$  qui définit un langage de mots  $L(G) \subseteq A^*$  :

- $V = \{X, Y, Z, \dots\}$  est un ensemble fini de variables.
- $S \in V$  est une variable de départ.
- $R$  est un ensemble de règles de réécriture. Ici on a droit à deux types de règles :
  - Les règles classiques (déjà autorisées dans les grammaires hors-contexte) de la forme :

$$X \rightarrow w \quad \text{avec } X \in V \text{ et } w \in (V \cup A)^*.$$

- Les règles ayant pour forme,

$$UX \rightarrow YZ \quad \text{avec } U, X, Y, Z \in V.$$


Le langage  $L(G) \subseteq A^*$  défini par  $G$  est le langage de tous les mots dans  $A^*$  qui peuvent être générés depuis la variable  $S$  de départ en appliquant des règles de  $R$ . Par exemple, considérons la grammaire  $G = (V, S, R)$  avec  $V = \{S, T, X, B, C_1, C_2\}$  et,

$$R = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow TX \\ T \rightarrow aTBC_1 \\ T \rightarrow \varepsilon \\ C_1B \rightarrow BC_1 \\ C_1X \rightarrow XC_2 \\ X \rightarrow \varepsilon \\ B \rightarrow b \\ C_2 \rightarrow c \end{array} \right\}$$

Il est simple vérifier que  $abc \in L(G)$ , comme attesté par la séquence suivante de réécritures :


$$S \rightarrow TX \rightarrow aTBC_1X \rightarrow aTBXC_2 \rightarrow aBXC_2 \rightarrow aBC_2 \rightarrow abcC_2 \rightarrow abc$$

- 1) Quel est le langage  $L(G)$  accepté par la grammaire  $G$  donnée en exemple ci-dessus ? Justifiez la réponse.
- 2) Montrer que le problème suivant est indécidable :

 **Non-vide**

**Entrée :** Une grammaire étendue  $G = (V, S, R)$ .

**Question :** Est-ce que  $L(G) \neq \emptyset$  ?

 **Indication**

À partir d'une machine de Turing à une bande  $M$ , commencer par construire une grammaire qui permet d'atteindre les mots de la forme  $A_1 \dots A_k Q_i B_1 \dots B_\ell \in V^*$ , où le mot  $a_1 \dots a_k q_i b_1 \dots b_\ell$  code une configuration de  $M$  (c'est-à-dire la configuration où  $a_1 \dots a_k b_1 \dots b_\ell$  est écrit sur la bande, la machine  $M$  est dans l'état  $q_i$  et la tête de lecture/écriture est sur la lettre  $b_1$ ).