

Examen Automates et Complexité, 27 juin 2016, 14h – 17h

Documents autorisés : notes de cours et de TD.

La notation attachera une grande importance à la clarté et à la concision des justifications.

Le barème est indicatif. Sauf mention contraire, les questions sont indépendantes.

Exercice 1 — Applications directes du cours (5 points). Répondez aux questions suivantes en **justifiant brièvement mais précisément** vos réponses (toute réponse non justifiée vaut 0 points) :

1) Le problème suivant est-il décidable ?

ENTRÉE : Une machine de Turing M à une bande et une entrée x de taille n pour cette machine.

QUESTION : Existe-t-il une exécution de M sur l'entrée x pour laquelle la tête de lecture/écriture de M atteint la $(n!)$ -ème case ?

2) Est-il vrai que tout problème de la classe **PSPACE** se réduit au problème de l'arrêt des machines de Turing ?

3) Peut-on décider si une machine de Turing déterministe donnée en entrée accepte exactement le langage des mots de la forme $u\#v\#w$ sur l'alphabet $\{0, 1, \#\}$, où $u, v, w \in \{0, 1\}^+$ sont les représentations binaires de 3 entiers x, y, z tels que $z = 42x^7y^6$?

4) Est-il vrai que le problème de 2-coloration se réduit polynomialement au problème de 3-coloration ?

5) Existe-t-il une machine de Turing qui s'arrête en temps polynomial par rapport à la taille de l'entrée et qui

— prend en entrée un nombre n représenté en binaire,

— accepte avec sur la bande de sortie la représentation binaire de 2^n ?

Exercice 2 — NP-Complétude (12 points). Dans cet exercice, on suppose que $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$. Pour chacun des problèmes suivants, dites si il est **NP-complet** ou dans **P**. Attention, les réponses doivent être **prouvées**. Si vous répondez qu'un problème est **NP-complet** vous devez prouver qu'il est dans **NP** et qu'il est **NP-difficile**. Si vous répondez qu'un problème est dans **P** vous devez donner un algorithme polynomial qui le résout.

Remarque : toutes les réductions sont faciles, la principale difficulté est de trouver le bon problème à réduire. Vous pouvez utiliser tout problème déjà abordé en cours, en TD, en devoir ou en examen, mais seulement ceux-là.

1) CHEMIN HAMILTONIEN ENTRE 2 SOMMETS.

ENTRÉE : Un graphe G non orienté et 2 sommets s, t de G .

QUESTION : Le graphe G a-t-il un chemin Hamiltonien allant de s à t ?

2) CHEMIN EULÉRIEN. Un *chemin Eulérien* dans un graphe non orienté est un chemin qui passe une et une seule fois par chaque arête.

ENTRÉE : Un graphe G non orienté.

QUESTION : Le graphe G a-t-il un chemin Eulérien ?

3) ENSEMBLE DOMINANT. Un *ensemble dominant* d'un graphe non orienté est un sous-ensemble D de l'ensemble des sommets tel que tout sommet du graphe est soit dans D , soit possède un voisin dans D .

ENTRÉE : Un graphe G non orienté et un entier $k \in \mathbb{N}$.

QUESTION : Le graphe G a-t-il un ensemble dominant de taille au plus k ?

4) PARTITION.

ENTRÉE : Un ensemble fini $E \subset \mathbb{Z}$ d'entiers relatifs.

QUESTION : Existe-t-il $A, B \subseteq E$ avec $A \cup B = E$, $A \cap B = \emptyset$ et $\sum_{x \in A} x = \sum_{x \in B} x$?

5) NON TAUTOLOGIE.

- ENTRÉE** : Une formule propositionnelle φ sur l'ensemble de connecteurs logiques \neg, \vee, \wedge .
QUESTION : Existe-t-il une valuation des variables qui rend φ fausse ?

- 6) PLUS LONG CIRCUIT. On rappelle qu'un circuit simple dans un graphe est un chemin commençant et finissant dans un même sommet, et qui ne visite pas 2 fois le même sommet à part celui de départ et d'arrivée. Dans cette question, on considère des graphes dont les arêtes portent des entiers, appelés *poids*. Le *poids* d'un chemin est la somme des poids des arêtes le long du chemin. Par exemple, le circuit

$$s_1 \xrightarrow{1} s_2 \xrightarrow{2} s_3 \xrightarrow{1} s_4 \xrightarrow{6} s_1$$

a un poids $1 + 2 + 1 + 6$, c'est-à-dire 10.

- ENTRÉE** : Un entier k et un graphe non orienté G dont chaque arête e a un poids $p(e) \in \mathbb{N}$.
QUESTION : Le graphe G a-t-il un circuit simple dont le poids vaut au moins k ?

- 7) PLANNING. Ce problème formalise la situation suivante : ℓ étudiants choisissent chacun des cours parmi n possibles. L'ensemble des cours choisis par l'étudiant p est noté C_p . On veut savoir si on peut placer les cours sur 3 créneaux, certains cours pouvant être en parallèle sur le même créneau, sous réserve qu'aucun étudiant ne soit inscrit à des cours en parallèle. La fonction f ci-dessous modélise l'attribution d'un cours à un créneau.

- ENTRÉE** : Des entiers n, ℓ et des sous-ensembles C_1, \dots, C_ℓ de $\{1, \dots, n\}$.
QUESTION : Existe-t-il une fonction totale $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ telle que si $f(i) = f(j)$, alors $|\{i, j\} \cap C_p| \leq 1$ pour tout p .

- 8) CLIQUE SPÉCIALE. Une *clique spéciale* d'un graphe dirigé G est un ensemble U de sommets tel que

- U est non vide,
- pour tout sommet v du graphe et tout $u \in U$, il y a une arête de v à u .
- pour tous sommets $u \in U$ et $w \notin U$, il n'y a pas d'arête de u à w .

- ENTRÉE** : Un graphe orienté G et un entier $k \in \mathbb{N}$.
QUESTION : Le graphe G a-t-il une clique spéciale de taille k ?

Indication : montrer d'abord que s'il existe une clique spéciale, il n'y en a qu'une seule.

Exercice 3 — Automates à files (3 points). Dans cet exercice, on présente un nouveau modèle de calcul : les *automates à file*. Un *automate à une file* sur l'alphabet A est un triplet $\mathcal{A} = (A, Q, \delta)$ où Q est son ensemble fini d'états, et $\delta \subseteq Q \times (\{!, ?\} \times A) \times Q$ est sa *relation de transition*. Un tel automate manipule une file FIFO de messages. De façon informelle, ! s'interprète comme « envoyer » et ? comme « recevoir » : lorsque \mathcal{A} effectue une transition étiquetée par $(!, a)$, le message a est ajouté en queue de file ; une transition étiquetée $(?, a)$ n'est franchissable que si le message le plus ancien dans la file (se trouvant en tête de file) est un a , auquel cas son franchissement retire ce message de la file.

Formellement, soit $S = \{(q, x) \mid q \in Q, x \in A^*\}$ l'ensemble des *configurations* de \mathcal{A} . Posons $B = (\{!, ?\} \times A)$.

Pour $b \in B$, on définit la relation \xrightarrow{b} sur S par $(q, x) \xrightarrow{b} (q', x')$ si $(q, b, q') \in \delta$, et

- si $b = (!, a)$, alors $x' = xa$ (ajout du message a dans la file) ;
- si $b = (?, a)$, alors $x = ax'$ (retrait du message a de la file).

Pour $z \in B^*$, on écrit $(q, x) \xrightarrow{z} (q', x')$ si soit $z = \varepsilon$ et $(q, x) = (q', x')$, soit $z = b_1 \dots b_n$ avec $b_i \in B$ et il existe des états $q_0 = q, q_1, \dots, q_n = q'$ et des mots $x_0 = x, x_1, \dots, x_n = x'$ tels que $(q_{i-1}, x_{i-1}) \xrightarrow{b_i} (q_i, x_i)$ pour $i = 1, \dots, n$. On définit enfin la relation \rightarrow sur S : $(q, x) \rightarrow (q', x')$ s'il existe $b \in B$ tel que $(q, x) \xrightarrow{b} (q', x')$.

- 1) Soit l'automate à une file $\mathcal{A} = (\{a\}, \{q\}, \{(q, (!, a), q), (q, (?, a), q)\})$. Décrire la relation \rightarrow ainsi que le langage $\{z \in B^* \mid (q, \varepsilon) \xrightarrow{z} (q, \varepsilon)\}$.
- 2) Montrer que le problème suivant est indécidable.

ENTRÉE : Un automate à une file et deux états q_0, q_1 .

QUESTION : Y a-t-il un chemin dans S allant de (q_0, ε) à (q_1, ε) , c'est-à-dire, a-t-on $(q_0, \varepsilon) \xrightarrow{*} (q_1, \varepsilon)$?

Indication : simuler directement une machine de Turing par un automate à file.