

Ce document propose une ou plusieurs corrections pour chaque exercice, volontairement très (trop) détaillées. Ces corrections ne sont pas uniques, et ne sont donc pas à apprendre à la lettre. Il est utile de comprendre les méthodes et d'acquérir une bonne rédaction, qui doit être claire et argumentée.

Exercice 1: Différence symétrique

On fixe un ensemble E quelconque. Si A et B sont deux sous-ensembles de E (c'est-à-dire que $A \subseteq E$ et $B \subseteq E$), on définit la *différence symétrique* de A et B , notée $A \Delta B$ comme suit,

$$A \Delta B = \{x \in A \cup B \mid x \notin A \cap B\}.$$

- 1) Soit A un sous-ensemble quelconque de A . Donner une description simple des quatre ensembles suivants : $A \Delta A$, $A \Delta \emptyset$, $A \Delta E$ et $A \Delta (E \setminus A)$.
- 2) Montrer que pour tous les sous-ensembles A et B de E , on a $A \Delta B = (A \cap (E \setminus B)) \cup (B \cap (E \setminus A))$.
- 3) Montrer que pour tous les sous-ensembles A, B et C de E , on a $(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$.

Correction proposée

- 1) Si A et B sont deux sous-ensembles de E , on note $A \setminus B$ l'ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas à B (en particulier, $E \setminus B$ est le complément de B). On a donc $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, et :
 - $A \Delta A = (A \cup A) \setminus (A \cap A) = A \setminus A = \emptyset$.
 - $A \Delta \emptyset = (A \cup \emptyset) \setminus (A \cap \emptyset) = A \setminus \emptyset = A$.
 - $A \Delta E = (A \cup E) \setminus (A \cap E) = E \setminus A$.
 - $A \Delta (E \setminus A) = (A \cup (E \setminus A)) \setminus (A \cap (E \setminus A)) = E \setminus \emptyset = E$.
- 2) Par définition, $A \cap (E \setminus B) = A \setminus B$. On doit donc montrer que $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. On peut raisonner par double inclusion.
 - **Inclusion** $A \Delta B \subseteq (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$: soit $x \in A \Delta B$, on doit montrer que $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Par définition de $A \Delta B$, on sait que $x \in A \cup B$ et $x \notin A \cap B$. Comme $x \in A \cup B$, on a soit $x \in A$, soit $x \in B$. Supposons que $x \in A$ (l'autre cas, $x \in B$, se traite de façon similaire, en échangeant les rôles de A et B). Alors, comme par hypothèse $x \notin A \cap B$, on obtient que $x \notin B$. On a donc $x \in A \setminus B$, et donc en particulier $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
 - **Inclusion** $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subseteq A \Delta B$: soit $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. On a donc soit $x \in A \setminus B$, soit $x \in B \setminus A$. Supposons que $x \in A \setminus B$ (à nouveau, l'autre cas, $x \in B \setminus A$, se traite de façon analogue en échangeant les rôles de A et B). On sait donc que $x \in A$ et $x \notin B$. En particulier, $x \in A \cup B$ et $x \notin A \cap B$. Donc par définition, $x \in A \Delta B$, ce qu'on voulait montrer.

Une autre preuve utilise le fait que deux ensembles sont égaux si et seulement si ils contiennent les mêmes éléments. Donc, établir l'égalité $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ revient à montrer que pour tout $x \in E$, on a :

$$x \in A \Delta B \iff x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A). \quad (1)$$

Cela conduit à une façon mécanique d'établir ce genre d'égalité, en considérant tous les cas possibles pour un élément arbitraire $x \in E$, en fonction de son appartenance à A ou B . Il y a 4 cas :

- a) Si $x \in A$ et $x \in B$, alors $x \in A \cap B$ donc $x \notin A \Delta B$ par définition de la différence symétrique. Par ailleurs, comme $x \in B$, on a $x \notin A \setminus B$ et comme $x \in A$, on a $x \notin B \setminus A$, ce qui donne $x \notin (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. L'équivalence (1) est donc vraie dans ce cas (les deux côtés étant faux).

- b) Si $x \notin A$ et $x \notin B$, alors $x \notin A \cup B$ donc $x \notin A \Delta B$ par définition de la différence symétrique. Par ailleurs, comme $x \notin A$, on a $x \notin A \setminus B$ et comme $x \notin B$, on a $x \notin B \setminus A$, ce qui donne $x \notin (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. L'équivalence (1) est donc vraie dans ce cas (les deux côtés étant encore faux).
- c) Si $x \in A$ et $x \notin B$, alors $x \in A \cup B$ mais $x \notin A \cap B$, donc $x \in A \Delta B$. Par ailleurs, comme $x \in A$ et $x \notin B$, on a $x \in A \setminus B$, et donc $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. L'équivalence (1) est vraie dans ce cas.
- d) Le dernier cas, $x \notin A$ et $x \in B$, est symétrique du précédent (échanger les rôles de A et B).

La propriété (1) est donc vraie pour tout $x \in E$, donc $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

3) On peut à nouveau prouver l'égalité $(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$ de plusieurs façons :

- soit par double inclusion,
- soit en montrant que pour tout $x \in E$, on a $x \in (A \Delta B) \cap C \iff x \in (A \cap C) \Delta (B \cap C)$, en considérant les 8 cas selon que x appartient ou non à A , à B et à C .
- soit en utilisant la propriété, facile à établir, que pour tous sous-ensembles X, Y, C de E , on a,

$$(X \setminus Y) \cap C = (X \cap C) \setminus (Y \cap C). \quad (2)$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} (A \Delta B) \cap C &= ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \cap C && \text{par définition de } \Delta \\ &= ((A \setminus B) \cap C) \cup ((B \setminus A) \cap C) && \text{par distributivité de } \cap \text{ sur } \cup \\ &= ((A \cap C) \setminus (B \cap C)) \cup ((B \cap C) \setminus (A \cap C)) && \text{d'après (2) pour } X = A \text{ et } Y = B \\ &= ((A \cap C) \setminus (B \cap C)) \cup ((B \cap C) \setminus (A \cap C)) && \text{d'après (2) pour } X = B \text{ et } Y = A \\ &= (A \cap C) \Delta (B \cap C) && \text{par définition de } \Delta. \end{aligned}$$

Exercice 2: Produit Cartésien

On note \mathbb{R} l'ensemble des nombres réels. On note E le sous-ensemble suivant de \mathbb{R}^2 :

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Est-il vrai qu'il existe deux sous-ensembles $A \subseteq \mathbb{R}$ et $B \subseteq \mathbb{R}$ tels que $E = A \times B$? On prouvera la réponse.

Correction proposée

La propriété est fautive, cela peut se montrer par l'absurde. Supposons qu'il existe $A \subseteq \mathbb{R}$ et $B \subseteq \mathbb{R}$ tels que $E = A \times B$. Comme $(0, 1) \in E$, on devrait avoir $1 \in B$ (et $0 \in A$, mais nous ne l'utilisons pas dans la preuve). De même, comme $(1, 0) \in E$, on devrait avoir $1 \in A$. On aurait donc $(1, 1) \in A \times B = E$. Mais $1^2 + 1^2 = 2 > 1$, donc $(1, 1) \notin E$, ce qui est une contradiction.

Exercice 3: Mots de Fibonacci et preuves par récurrence

On fixe un alphabet à deux lettres $A = \{a, b\}$. On rappelle qu'un mot sur l'alphabet A est une séquence finie de lettres "a" et "b". Par exemple "aabbabab" est un mot. Étant donnés deux mots u et v , on notera uv le mot obtenu en concaténant u avec v (par exemple si $u = aa$ et $v = bab$ alors $uv = aabab$).

On étudie la suite de mots $(w_i)_{i \geq 1}$ définie par la récurrence suivante : $w_1 = a$, $w_2 = ab$ et pour tout $i \geq 3$, $w_i = w_{i-1}w_{i-2}$. On a donc,

$$\begin{array}{ll} \text{— } w_1 = a & \text{— } w_3 = aba \\ \text{— } w_2 = ab & \text{— } w_4 = abaab \end{array}$$

1) Montrer que pour tout $i \geq 1$, la première lettre du mot w_i est un a .

2) Montrer que pour tout $i \geq 1$, le mot w_i ne contient pas deux b consécutifs.

Pour tout $i \geq 3$, on note p_i le mot obtenu à partir de w_i en enlevant ses deux dernières lettres ($p_3 = a$,

$p_4 = aba, p_5 = abaaba, \dots$). On cherche maintenant à montrer que pour tout $i \geq 3$, le mot p_i est un palindrome (c'est-à-dire que le mot est le même qu'on le lise de gauche à droite ou de droite à gauche).

- 3) Montrer que pour tout $i \geq 3$, on a la propriété suivante. Si i est pair alors $w_i = p_i ab$ (w_i se termine par ab) et si i est impair alors $w_i = p_i ba$ (w_i se termine par ba).
- 4) Conclure.

Correction proposée

- 1) On montre la propriété par récurrence sur i . Le cas de base doit considérer $i = 1$ **et** $i = 2$ (pourquoi?).
 - a) Pour $i = 1$ et $i = 2$: clairement, la première lettre de $w_1 = a$ et de $w_2 = ab$ est un a .
 - b) Soit maintenant $i \geq 3$, et supposons vraie la propriété

« La première lettre du mot w_{i-1} est un a . »

En particulier, w_{i-1} n'est pas le mot vide. Or, par définition, $w_i = w_{i-1}w_{i-2}$. La première lettre de w_i est donc la même que celle de w_{i-1} (puisque w_{i-1} n'est pas vide), donc un a .

On a montré la propriété par récurrence.

- 2) On montre la propriété par récurrence **forte** sur i . Le cas de base doit considérer $i = 1$ **et** $i = 2$.
 - a) Pour $i = 1$ et $i = 2$: clairement, ni $w_1 = a$ ni $w_2 = ab$ ne contiennent deux b consécutifs.
 - b) Soit maintenant $i \geq 3$, et supposons vraie la propriété suivante, pour tout $k \geq 1$ tel que $k < i$:

« Le mot w_k ne contient pas deux b consécutifs. »

On a $1 \leq i-2 < i-1 < i$, on peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à $k = i-1$ et $k = i-2$: il n'y a pas deux b consécutifs dans w_{i-1} , ni dans w_{i-2} . Comme $w_i = w_{i-1}w_{i-2}$, la seule façon d'avoir deux b consécutifs dans w_i serait donc d'avoir un b en dernière lettre de w_{i-1} et un b en première lettre de w_{i-2} . Mais d'après la question précédente, w_{i-2} commence par un a . Donc, w_i ne contient pas deux b consécutifs.

- 3) On montre la propriété par récurrence **forte** sur i . Le cas de base doit considérer $i = 3$ **et** $i = 4$.
 - a) Pour $i = 3$, $w_3 = aba$ se termine bien par ba et pour $i = 4$, $w_4 = abaab$ se termine bien par ab .
 - b) Soit maintenant $i \geq 5$, et supposons vraie la propriété suivante, pour tout $k \geq 3$ tel que $k < i$:

« Si k est pair, le mot w_k se termine par ab et si k est impair, il se termine par ba . »

On a $3 \leq i-2 < i$, donc on peut appliquer l'hypothèse de récurrence pour $k = i-2$. En particulier, w_{i-2} est au moins de longueur 2 (puisque'il se termine par ab ou ba). Comme $w_i = w_{i-1}w_{i-2}$, les deux dernières lettres de w_i sont les deux dernières lettres de w_{i-2} . Comme i et $i-2$ ont même parité, le résultat demandé découle immédiatement de l'hypothèse de récurrence pour $k = i-2$.

- 4) On sait que si $i \geq 3$,

$$w_i = \begin{cases} p_i ab & \text{si } i \text{ est pair.} \\ p_i ba & \text{si } i \text{ est impair.} \end{cases}$$

On montre que p_i est un palindrome pour $i \geq 2$ par récurrence **forte** sur i . Pour le cas de base, on doit considérer les valeurs $i = 2, 3$ **et** 4 (pourquoi?).

- a) Pour $i = 2, 3$ et 4 , on calcule facilement $p_2 = \varepsilon$, $p_3 = a$ et $p_4 = aba$, qui sont des palindromes.
- b) Soit maintenant $i \geq 5$, et supposons vraie la propriété suivante, pour tout $k \geq 2$ tel que $k < i$:

« Le mot p_k est un palindrome. »

Par définition de w_i , on a $w_i = w_{i-1}w_{i-2} = w_{i-2}w_{i-3}w_{i-2}$. Donc, d'après la question précédente,

$$w_i = \begin{cases} p_{i-2} ab p_{i-3} ba p_{i-2} ab & \text{si } i \text{ est pair.} \\ p_{i-2} ba p_{i-3} ab p_{i-2} ba & \text{si } i \text{ est impair.} \end{cases}$$

Comme p_i est obtenu à partir de w_i en supprimant ses deux dernières lettres, on obtient :

$$p_i = \begin{cases} p_{i-2} ab p_{i-3} ba p_{i-2} & \text{si } i \text{ est pair.} \\ p_{i-2} ba p_{i-3} ab p_{i-2} & \text{si } i \text{ est impair.} \end{cases}$$

Comme $i \geq 5$, on a $2 \leq i-3 < i-2 < i$, on peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à $k = i-3$ et $k = i-2$, ce qui donne que p_{i-3} et p_{i-2} sont des palindromes. La forme de p_i ci-dessus prouve alors que p_i est aussi un palindrome.