

Exercice 1: Différence symétrique (le retour)

On fixe un ensemble E quelconque. Si A et B sont deux sous-ensembles de E (c'est-à-dire que $A \subseteq E$ et $B \subseteq E$), on note $A \setminus B$ l'ensemble des éléments de E appartenant à A mais pas à B . La *différence symétrique* de A et B , notée $A \Delta B$ est le sous-ensemble suivant de E :

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Soient A , B et C trois sous-ensembles quelconques de E .

- 1) Montrer que $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$. Vous pouvez utiliser ou non le tableau donné en annexe.
- 2) En déduire que $A \Delta C = B$ si et seulement si $C = A \Delta B$.
- 3) On suppose fixé le sous-ensemble A de E . On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des sous-ensembles de E et on définit une fonction $f_A : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ par $f_A(X) = A \Delta X$. Quelle propriété de la fonction f_A la question 2) exprime-t-elle? Justifier votre réponse de façon précise (mais concise).

Correction proposée

- 1) On complète le tableau donné en annexe, que l'on complète en utilisant la définition de la différence symétrique : un élément est dans $X \Delta Y$ s'il est dans X ou dans Y , mais pas dans les deux.

$x \in A$	0	0	0	0	1	1	1	1
$x \in B$	0	0	1	1	0	0	1	1
$x \in C$	0	1	0	1	0	1	0	1
$x \in A \Delta B$	0	0	1	1	1	1	0	0
$x \in B \Delta C$	0	1	1	0	0	1	1	0
$x \in (A \Delta B) \Delta C$	0	1	1	0	1	0	0	1
$x \in A \Delta (B \Delta C)$	0	1	1	0	1	0	0	1

Les lignes $(A \Delta B) \Delta C$ et $A \Delta (B \Delta C)$ sont les mêmes, ces deux ensembles sont donc égaux.

- 2) Si $B = A \Delta C$, alors $A \Delta B = A \Delta (A \Delta C) = (A \Delta A) \Delta C = \emptyset \Delta C = C$.
Inversement, si $C = A \Delta B$, on a $A \Delta C = A \Delta (A \Delta B) = (A \Delta A) \Delta B = \emptyset \Delta B = B$.
- 3) La question 2) s'écrit $f_A(C) = B \iff C = f_A(B)$, ce qui montre que f_A est une bijection de $\mathcal{P}(E)$ dans lui-même, et est sa propre bijection réciproque (on dit dans ce cas que f_A est une involution).

Exercice 2: Produit Cartésien

Soient E , F , G , H quatre ensembles.

- 1) Montrer que $(E \times F) \cap (G \times H) = (E \cap G) \times (F \cap H)$.
On note maintenant $A = (E \times F) \cup (G \times H)$ et $B = (E \cup G) \times (F \cup H)$.
- 2) L'une des inclusions $A \subseteq B$ ou $B \subseteq A$ est toujours vraie. Déterminer laquelle, en donnant une preuve.
- 3) Donner un contre-exemple qui montre que l'autre inclusion n'est pas toujours vraie.

Correction proposée

- 1) On a $E \cap G \subseteq E$ et $F \cap H \subseteq F$, donc $(E \cap G) \times (F \cap H) \subseteq E \times F$. De même, $(E \cap G) \times (F \cap H) \subseteq G \times H$. On en déduit que $(E \cap G) \times (F \cap H) \subseteq (E \times F) \cap (G \times H)$.
Inversement, soit $x \in (E \times F) \cap (G \times H)$, donc $x = (e, f) = (g, h)$ avec $e \in E$, $f \in F$, $g \in G$ et $h \in H$. On en déduit $e = g$ et $f = h$, donc que $e \in E \cap G$ et $f \in F \cap H$. Finalement, $x \in (E \cap G) \times (F \cap H)$.

- 2) On a $E \subseteq E \cup G$ et $F \subseteq F \cup H$, donc $E \times F \subseteq (E \cup G) \times (F \cup H)$. De même, $G \times H \subseteq (E \cup G) \times (F \cup H)$.
Donc $(E \times F) \cup (G \times H) \subseteq (E \cup G) \times (F \cup H)$.
- 3) Un contre-exemple pour l'inclusion inverse est $E = F = \{0, 1\}$ et $G = H = \{1, 2\}$.

Exercice 3: Mots de Thue-Morse et preuves par récurrence

On fixe un alphabet à deux lettres $A = \{0, 1\}$. On rappelle qu'un mot sur l'alphabet A est une séquence finie de lettres "0" et "1". Par exemple "00110101" est un tel mot. Étant donnés deux mots u et v , on note uv le mot obtenu en concaténant u avec v (par exemple si $u = 00$ et $v = 101$ alors $uv = 00101$). On définit la fonction $f : \{0, 1\} \rightarrow \{01, 10\}$ par $f(0) = 01$ et $f(1) = 10$. On définit ensuite la fonction $g : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ de la façon suivante : $g(\varepsilon) = \varepsilon$, et $g(a_1 \cdots a_n) = f(a_1) \cdots f(a_n)$ lorsque $a_i \in \{0, 1\}$. Par exemple, $g(0) = f(0) = 01$, et $g(00101) = f(0)f(0)f(1)f(0)f(1) = 0101100110$. On étudie la suite de mots $(w_i)_{i \geq 1}$ définie par la récurrence suivante : $w_0 = 0$ et pour tout $i \geq 1$, $w_i = g(w_{i-1})$. On a donc,

$$\begin{array}{ll} - w_0 = 0 & - w_2 = 0110 \\ - w_1 = 01 & - w_3 = 01101001. \end{array}$$

- Justifier brièvement (mais en donnant un argument précis) que le mot w_k est de longueur 2^k .
- Soit $h : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ la fonction qui remplace chaque 0 par un 1 et chaque 1 par un 0. Par exemple, $h(000101) = 111010$. Vérifier que pour tout mot $u \in \{0, 1\}^*$, on a $g(h(u)) = h(g(u))$.
- En utilisant la question précédente et une récurrence, montrer que pour tout $k \geq 0$, on a

$$w_{k+1} = w_k h(w_k).$$

- En déduire que pour tout $k \geq 0$, on a aussi : $w_{k+1} = w_0 h(w_0) h(w_1) \cdots h(w_k)$.
- On note w le mot infini $w_0 h(w_0) h(w_1) h(w_2) \cdots$ et on pose $w = a_0 a_1 a_2 \cdots$ avec $a_i \in \{0, 1\}$ pour tout i (autrement dit, a_0 est la première lettre de w , a_1 est sa seconde lettre, etc.).
Montrer que pour tout $i \geq 0$, a_i est égal au nombre de 1, modulo 2, dans l'écriture binaire de i .

Correction proposée

- Le mot w_{k+1} s'obtient de w_k en remplaçant 0 par 01 et 1 par 10. La taille de w_{k+1} est donc le double de celle de w_k . Comme $|w_0| = 1 = 2^0$, on obtient par récurrence immédiate que la taille de w_k est 2^k .
- Il suffit de montrer que $g(h(u)) = h(g(u))$ si u est le mot vide ou une lettre. En effet, si $u = a_1 \cdots a_n$, on a $g(h(u)) = g(h(a_1 \cdots a_n)) = g(h(a_1)) \cdots g(h(a_n))$ et $h(g(u)) = h(g(a_1 \cdots a_n)) = h(g(a_1)) \cdots h(g(a_n))$. Si $u = \varepsilon$, on a $g(h(u)) = g(\varepsilon) = \varepsilon$ et $h(g(u)) = h(\varepsilon) = \varepsilon$. Si $u = 0$, on a $g(h(u)) = g(1) = 10$ et $h(g(u)) = h(01) = 10$. Enfin, si $u = 1$, on a $g(h(u)) = g(0) = 01$ et $h(g(u)) = h(10) = 01$. On a donc $g(h(u)) = h(g(u))$ si u est le mot vide ou une lettre, donc en fait pour tout mot u .
- La propriété est vraie pour $k = 0$: $w_1 = 01$ et $w_0 h(w_0) = 0h(0) = 01$. Soit maintenant $k \geq 1$. Supposons la propriété vraie pour l'entier $(k - 1)$, et montrons-la pour l'entier k . Par hypothèse de récurrence, on a donc $w_k = w_{k-1} h(w_{k-1})$. En appliquant g des deux côtés, on obtient :

$$w_{k+1} = g(w_{k-1} h(w_{k-1})) = g(w_{k-1}) g(h(w_{k-1})) = w_k h(g(w_{k-1})) = w_k h(w_k).$$

- Par récurrence : pour $k = 0$, on a bien $w_1 = w_0 h(w_0)$. Si la propriété est vraie au rang $k - 1$, on a $w_k = w_0 h(w_0) \cdots h(w_{k-1})$. D'après la question 3), on a alors $w_{k+1} = w_k h(w_k) = w_0 h(w_0) \cdots h(w_{k-1}) h(w_k)$.
- On montre le résultat pour $k < 2^n$ par récurrence sur n . Si $n = 0$, alors $k < 1$ donc $k = 0$. On a $a_0 = 0$, c'est bien la parité du nombre de 1 dans l'écriture de 0 en base 2. Supposons le résultat vrai au rang n . Soit $k < 2^{n+1}$. Si $k < 2^n$, le résultat est conséquence immédiate de l'hypothèse de récurrence. Sinon, $2^n \leq k < 2^{n+1}$. On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence à $\ell = k - 2^n$, car $0 \leq \ell < 2^n$. La parité du nombre de 1 dans l'écriture binaire de ℓ est donc a_ℓ . Le résultat est conséquence de ce que :
 - la parité du nombre de 1 dans l'écriture binaire de k est $1 - a_\ell$, car $k = 2^n + \ell$;
 - $a_k = 1 - a_\ell$ car $w_{n+1} = w_n h(w_n)$ et w_n est de longueur 2^n .