

Exercice 1: Différence symétrique

On fixe un ensemble E quelconque. Si A et B sont deux sous-ensembles de E (c'est-à-dire que $A \subseteq E$ et $B \subseteq E$), on définit la *différence symétrique* de A et B , notée $A \Delta B$ comme suit,

$$A \Delta B = \{x \in A \cup B \mid x \notin A \cap B\}.$$

- 1) Soit A un sous-ensemble quelconque de A . Donner une description simple des quatre ensembles suivants : $A \Delta A$, $A \Delta \emptyset$, $A \Delta E$ et $A \Delta (E \setminus A)$.
- 2) Montrer que pour tous les sous-ensembles A et B de E , on a $A \Delta B = (A \cap (E \setminus B)) \cup (B \cap (E \setminus A))$.
- 3) Montrer que pour tous les sous-ensembles A, B et C de E , on a $(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$.

Exercice 2: Ensemble des sous-ensembles

Pour un ensemble E fini ou non, on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des sous-ensembles de E .

- 1) Calculer $\mathcal{P}(\emptyset)$.
- 2) Calculer $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$.
- 3) De façon générale, si E est fini, combien y a-t-il d'éléments dans $\mathcal{P}(E)$? Justifier brièvement la réponse.
- 4) Montrer que si E est fini, il n'existe pas de surjection de E dans $\mathcal{P}(E)$.

On suppose maintenant que E est infini, et on veut montrer par l'absurde qu'il n'existe pas de surjection de E dans $\mathcal{P}(E)$. Soit donc $f : E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ une fonction. Soit A l'élément suivant de $\mathcal{P}(E)$:

$$A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}.$$

- 5) Montrer que A ne peut pas être de la forme $f(y)$. Vous pouvez distinguer deux cas, selon que y appartient ou non à A .
- 6) Conclure.

Exercice 3: Rationnels, irrationnels et preuves par l'absurde

Dans cet exercice, on considère uniquement des réels positifs. On rappelle qu'un *rationnel* est un réel pouvant s'écrire p/q où p et q sont deux nombres entiers (avec bien sûr $q \neq 0$). Un réel qui n'est pas rationnel est appelé *irrationnel*.

- 1) Justifier que tout rationnel peut s'écrire p/q où p et q sont deux nombres entiers premiers entre eux (c'est-à-dire que leur seul diviseur commun est 1).
 - 2) Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel en faisant une preuve par l'absurde et en utilisant la question 1).
- Pour les questions suivantes, vous pouvez utiliser la question 2) même si vous ne l'avez pas faite. On veut montrer qu'il existe deux irrationnels x et y tels que x^y est rationnel. On pose $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$.
- 3) Calculer $a^{\sqrt{2}}$.
 - 4) Conclure.