

## Vérification des prérequis mathématiques : Test 1

### Exercice 1: Base 2 et injections

1) Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$\sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1.$$

2) Montrer que tout entier  $n \geq 1$  s'écrit comme somme de puissances de 2 distinctes, c'est-à-dire que pour tout  $n \geq 1$ , il existe un entier  $p \geq 1$  et  $p$  entiers  $k_1, \dots, k_p$  tels que,

$$\begin{cases} 0 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_p \text{ et,} \\ n = 2^{k_1} + \dots + 2^{k_p}. \end{cases}$$

3) Montrer que la décomposition en puissances de 2 de la question 2) est unique, c'est-à-dire que si  $p$  entiers  $k_1, \dots, k_p$  et  $q$  entiers  $\ell_1, \dots, \ell_q$  vérifient :

$$\begin{cases} 0 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_p, \\ 0 \leq \ell_1 < \ell_2 < \dots < \ell_q \text{ et,} \\ 2^{k_1} + \dots + 2^{k_p} = 2^{\ell_1} + \dots + 2^{\ell_q}. \end{cases}$$

alors  $p = q$  et pour tout entier  $i$  entre 1 et  $p$ , on a  $k_i = \ell_i$ .

**Indication.** Vous pouvez utiliser la question 1).

Pour les questions suivantes, vous pouvez utiliser le résultat des questions précédentes.

4) Donner une injection  $f_1$  de  $\mathbb{N}$  dans  $\{0, 1\}^*$ . Justifier que  $f_1$  est bien une injection.

5) Donner une injection  $f_2$  de  $\{0, 1\}^*$  dans  $\mathbb{N}$ . Justifier également que  $f_2$  est bien une injection.

### Exercice 2: Fonctions bijectives

Soit  $f : E \rightarrow F$  une fonction. Montrer que  $f$  est bijective si et seulement si, pour tout sous-ensemble  $A$  de  $E$ , on a :

$$F \setminus f(A) = f(E \setminus A).$$

### Exercice 3: Relations d'équivalence

On va considérer des relations sur l'ensemble  $\mathbb{R}^2$  des paires de nombres réels :

1) Soit «  $\sim$  » la relation définie par  $(u, v) \sim (x, y) \Leftrightarrow uv = xy$  pour tous  $(u, v), (x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Cette relation est-elle une relation d'équivalence? Justifier. Si oui, décrire les classes d'équivalence.

2) Soit «  $\equiv$  » la relation définie par  $(u, v) \equiv (x, y) \Leftrightarrow uv = xy$  et  $ux \geq 0$  pour tous  $(u, v), (x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Cette relation est-elle une relation d'équivalence? Justifier. Si oui, décrire les classes d'équivalence.