

Exercice 1: Différence symétrique

On fixe un ensemble E quelconque. Si A et B sont deux sous-ensembles de E (c'est-à-dire que $A \subseteq E$ et $B \subseteq E$), on définit la *différence symétrique* de A et B , notée $A \Delta B$ comme suit,

$$A \Delta B = \{x \in A \cup B \mid x \notin A \cap B\}.$$

- 1) Soit A un sous-ensemble quelconque de A . Donner une description simple des quatre ensembles suivants : $A \Delta A$, $A \Delta \emptyset$, $A \Delta E$ et $A \Delta (E \setminus A)$.
- 2) Montrer que pour tous les sous-ensembles A et B de E , on a $A \Delta B = (A \cap (E \setminus B)) \cup (B \cap (E \setminus A))$.
- 3) Montrer que pour tous les sous-ensembles A, B et C de E , on a $(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$.

Exercice 2: Produit Cartésien

On note \mathbb{R} l'ensemble des nombres réels. On note E le sous-ensemble suivant de \mathbb{R}^2 :

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Est-il vrai qu'il existe deux sous-ensembles $A \subseteq \mathbb{R}$ et $B \subseteq \mathbb{R}$ tels que $E = A \times B$? On prouvera la réponse.

Exercice 3: Mots de Fibonacci et preuves par récurrence

On fixe un alphabet à deux lettres $A = \{a, b\}$. On rappelle qu'un mot sur l'alphabet A est une séquence finie de lettres "a" et "b". Par exemple "aabbabab" est un mot. Étant donnés deux mots u et v , on notera uv le mot obtenu en concaténant u avec v (par exemple si $u = aa$ et $v = bab$ alors $uv = aabab$).

On étudie la suite de mots $(w_i)_{i \geq 1}$ définie par la récurrence suivante : $w_1 = a$, $w_2 = ab$ et pour tout $i \geq 3$, $w_i = w_{i-1}w_{i-2}$. On a donc,

$$\begin{array}{ll} - w_1 = a & - w_3 = aba \\ - w_2 = ab & - w_4 = abaab \end{array}$$

- 1) Montrer que pour tout $i \geq 1$, la première lettre du mot w_i est un a .
- 2) Montrer que pour tout $i \geq 1$, le mot w_i ne contient pas deux b consécutifs.

Pour tout $i \geq 3$, on note p_i le mot obtenu à partir de w_i en enlevant ses deux dernières lettres ($p_3 = a$, $p_4 = aba$, $p_5 = abaaba$, ...). On cherche maintenant à montrer que pour tout $i \geq 3$, le mot p_i est un palindrome (c'est-à-dire que le mot est le même qu'on le lise de gauche à droite ou de droite à gauche).

- 3) Montrer que pour tout $i \geq 3$, on a la propriété suivante. Si i est pair alors $w_i = p_i ab$ (w_i se termine par ab) et si i est impair alors $w_i = p_i ba$ (w_i se termine par ba).
- 4) Conclure.