

Toute fonction considérée est supposée totale : son ensemble de définition est son ensemble de départ.

Exercice 1: Injectivité et surjectivité

Dans cet exercice, X, Y et Z désignent des ensembles et f, g des fonctions. On rappelle que si $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ sont des fonctions, on note $g \circ f : X \rightarrow Z$ la fonction obtenue en composant g avec f .

- 1) Soient $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
- 2) L'affirmation suivante est-elle vraie : « Pour toutes fonctions $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$, si $g \circ f$ est surjective, alors f est surjective » ? Justifier la réponse.
- 3) Soient $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
- 4) L'affirmation suivante est-elle vraie : « Pour toutes fonctions $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$, si $g \circ f$ est injective, alors g est injective » ? Justifier la réponse.

Exercice 2: Surjectivité

On considère des ensembles X et Y et une fonction $f : X \rightarrow Y$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- 1) f est surjective.
- 2) Pour tout $B \subseteq Y$, on a $B = f(f^{-1}(B))$.
- 3) Pour tout $B \subseteq Y$, on a $B \subseteq f(f^{-1}(B))$.
- 4) On a $Y = f(f^{-1}(Y))$.

Exercice 3: Ensemble des sous-ensembles

Pour un ensemble E fini ou non, on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des sous-ensembles de E .

- 1) Calculer $\mathcal{P}(\emptyset)$ et $\mathcal{P}(\{1, 2\})$.
- 2) Si E est fini et a n éléments, quel est le nombre d'éléments de $\mathcal{P}(E)$? Justifier la réponse.
- 3) Montrer que si E est fini, il n'existe pas de surjection de E dans $\mathcal{P}(E)$.
- 4) Montrer que si E est infini, il n'existe pas de surjection de E dans $\mathcal{P}(E)$ en supposant par l'absurde qu'il existe une surjection $f : E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ et en considérant le sous-ensemble $A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$.

Exercice 4: Relations d'équivalence

On va considérer des relations sur l'ensemble \mathbb{R}^2 des paires de nombres réels :

- 1) Soit « \sim » la relation définie par $(u, v) \sim (x, y) \Leftrightarrow uv = xy$ pour tous $(u, v), (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Cette relation est-elle une relation d'équivalence? Si oui, décrire les classes d'équivalence. Sinon, justifier.
- 2) Soit « \equiv » la relation définie par $(u, v) \equiv (x, y) \Leftrightarrow uv = xy$ et $ux \geq 0$ pour tous $(u, v), (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Cette relation est-elle une relation d'équivalence? Si oui, décrire les classes d'équivalence. Sinon, justifier.

Exercice 5: Entier relatifs et fonctions

Prouver qu'il n'existe pas de fonction $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $f(f(n)) = n + 1$.