

## Vérification des prérequis mathématiques : Test 2

### Exercice 1: Fonction strictement croissante

Montrer qu'il existe une unique fonction  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  qui est strictement croissante et telle que  $f(f(n)) = n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Expliciter cette fonction en en donnant une définition directe.

### Exercice 2: Ensembles

On considère une famille finie  $\{E_1, \dots, E_n\}$  d'ensembles distincts deux à deux (c'est-à-dire qu'on a  $E_i \neq E_j$  pour tous les indices  $i, j \leq n$  tels que  $i \neq j$ ).

Montrer qu'il existe un indice  $i \leq n$  tel que pour tout indice  $j \leq n$  tel que  $i \neq j$ , l'ensemble  $E_j$  n'est **pas** inclus dans  $E_i$  (c'est-à-dire que  $E_j \not\subseteq E_i$ ).

### Exercice 3: Min et max

On considère une fonction  $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  et un entier  $n \in \mathbb{N}$  quelconque. Comparer les deux entiers suivants :

$$A = \min_{0 \leq i \leq n} \left( \max_{0 \leq j \leq n} (f(i, j)) \right) \quad \text{et} \quad B = \max_{0 \leq j \leq n} \left( \min_{0 \leq i \leq n} (f(i, j)) \right)$$

On prouvera la réponse.

### Exercice 4: Relations d'équivalence

On considère un ensemble  $E$  et deux relations d'équivalence  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{S}$  sur  $E$ . On définit deux nouvelles relations sur  $E$  notées  $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$  et  $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$  de façon symétrique :

- Étant donnés  $x, y \in E$ , on  $x \mathcal{R} \circ \mathcal{S} y$  si et seulement si il existe  $z \in E$  tel que  $x \mathcal{R} z$  et  $z \mathcal{S} y$ .
- Étant donnés  $x, y \in E$ , on  $x \mathcal{S} \circ \mathcal{R} y$  si et seulement si il existe  $z \in E$  tel que  $x \mathcal{S} z$  et  $z \mathcal{R} y$ .

Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1)  $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$  est une relation d'équivalence.
- 2)  $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$  est une relation d'équivalence.
- 3)  $\mathcal{R} \circ \mathcal{S} = \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ .