

Exercice 1: Différence symétrique (le retour)

On fixe un ensemble E quelconque. Si A et B sont deux sous-ensembles de E (c'est-à-dire que $A \subseteq E$ et $B \subseteq E$), on note $A \setminus B$ l'ensemble des éléments de E appartenant à A mais pas à B . La *différence symétrique* de A et B , notée $A \Delta B$ est le sous-ensemble suivant de E :

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Soient A , B et C trois sous-ensembles quelconques de E .

- 1) Montrer que $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$. Vous pouvez utiliser ou non le tableau donné en annexe.
- 2) En déduire que $A \Delta C = B$ si et seulement si $C = A \Delta B$.
- 3) On suppose fixé le sous-ensemble A de E . On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des sous-ensembles de E et on définit une fonction $f_A : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ par $f_A(X) = A \Delta X$. Quelle propriété de la fonction f_A la question 2) exprime-t-elle? Justifier votre réponse de façon précise (mais concise).

Exercice 2: Produit Cartésien

Soient E , F , G , H quatre ensembles.

- 1) Montrer que $(E \times F) \cap (G \times H) = (E \cap G) \times (F \cap H)$.
On note maintenant $A = (E \times F) \cup (G \times H)$ et $B = (E \cup G) \times (F \cup H)$.
- 2) L'une des inclusions $A \subseteq B$ ou $B \subseteq A$ est toujours vraie. Déterminer laquelle, en donnant une preuve.
- 3) Donner un contre-exemple qui montre que l'autre inclusion n'est pas toujours vraie.

Exercice 3: Mots de Thue-Morse et preuves par récurrence

On fixe un alphabet à deux lettres $A = \{0, 1\}$. On rappelle qu'un mot sur l'alphabet A est une séquence finie de lettres "0" et "1". Par exemple "00110101" est un tel mot. Étant donnés deux mots u et v , on note uv le mot obtenu en concaténant u avec v (par exemple si $u = 00$ et $v = 101$ alors $uv = 00101$).

On définit la fonction $f : \{0, 1\} \rightarrow \{01, 10\}$ par $f(0) = 01$ et $f(1) = 10$. On définit ensuite la fonction $g : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ de la façon suivante : $g(\varepsilon) = \varepsilon$, et $g(a_1 \cdots a_n) = f(a_1) \cdots f(a_n)$ lorsque $a_i \in \{0, 1\}$. Par exemple, $g(0) = f(0) = 01$, et $g(00101) = f(0)f(0)f(1)f(0)f(1) = 0101100110$.

On étudie la suite de mots $(w_i)_{i \geq 1}$ définie par la récurrence suivante : $w_0 = 0$ et pour tout $i \geq 1$, $w_i = g(w_{i-1})$. On a donc,

$$\begin{array}{ll} - w_0 = 0 & - w_2 = 0110 \\ - w_1 = 01 & - w_3 = 01101001. \end{array}$$

- 1) Justifier brièvement (mais en donnant un argument précis) que le mot w_k est de longueur 2^k .
- 2) Soit $h : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ la fonction qui remplace chaque 0 par un 1 et chaque 1 par un 0. Par exemple, $h(000101) = 111010$. Vérifier que pour tout mot $u \in \{0, 1\}^*$, on a $g(h(u)) = h(g(u))$.
- 3) En utilisant la question précédente et une récurrence, montrer que pour tout $k \geq 0$, on a

$$w_{k+1} = w_k h(w_k).$$

- 4) En déduire que pour tout $k \geq 0$, on a aussi : $w_{k+1} = w_0 h(w_0) h(w_1) \cdots h(w_k)$.
- 5) On note w le mot infini $w_0 h(w_0) h(w_1) h(w_2) \cdots$ et on pose $w = a_0 a_1 a_2 \cdots$ avec $a_i \in \{0, 1\}$ pour tout i (autrement dit, a_0 est la première lettre de w , a_1 est sa seconde lettre, etc.).
Montrer que pour tout $i \geq 0$, a_i est égal au nombre de 1, modulo 2, dans l'écriture binaire de i .

