

# Probabilités Continues

Dans le cas où l'espace des événements élémentaires n'est pas dénombrable les probabilités ne peuvent pas être caractérisées **ponctuellement**. En effet, il se peut que ces probabilités soient **nulles** et, donc, leur connaissance n'apporte aucune information sur la probabilité des événements contenant une **infinité indénombrable** d'événements élémentaires. Considérons à titre d'exemple, les problèmes suivants :

- **(Aiguille de Buffon)**. On lance une aiguille de longueur 1 sur un parquet dont les lames sont parallèles de distance 1. Quelle est la probabilité que l'aiguille chevauche une lame du parquet ?
- Une procédure a généré uniformément trois *réels* aléatoires dans l'intervalle (réel)  $[0, 1]$ . Quelle est la probabilité pour que ces grandeurs soient les mesures des côtés d'un triangle ?

On *ne peut pas* formuler ces questions en termes de probabilités associées à des valeurs ponctuelles des paramètres qui déterminent l'événement.

Nous sommes alors ramené à emprunter d'autres outils que la somme de probabilités (ou d'une série de probabilités).

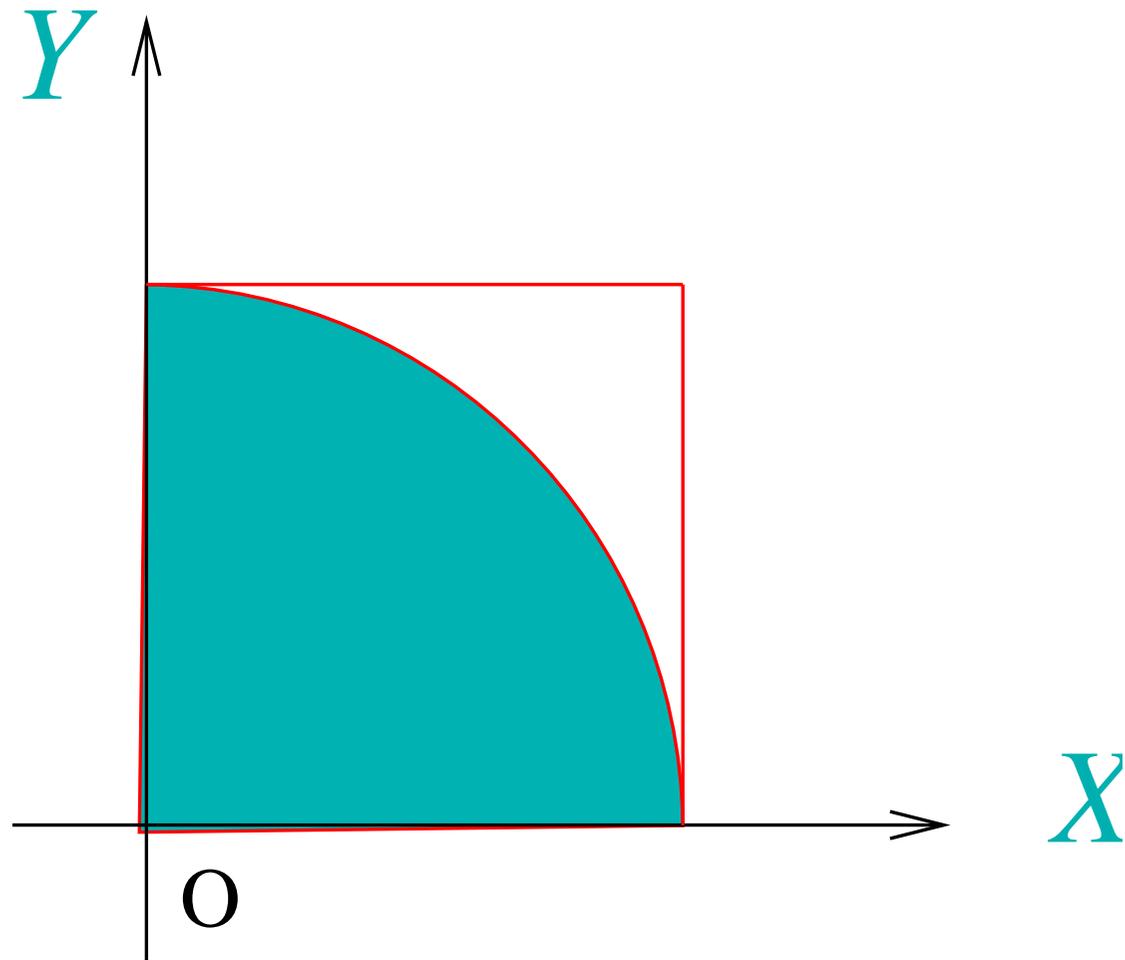
Dans le cas des espaces continus, le calcul de la probabilité d'un événement par une **somme** (employé dans le cas des espaces discrets) doit être remplacée par une **intégrale**.

## Quelques Exemples Simples

**Exemple 1.** Une procédure a généré deux réels  $X$  et  $Y$  uniformément et indépendamment dans l'intervalle  $[0, 1]$ . Définir l'espace probabilisé et calculer la probabilité pour que la distance (euclidienne) du point  $(X, Y)$  de l'origine ne dépasse pas  $1$ .

**Solution.** On prend pour  $\Omega$  le carré  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

La distance du point  $(X, Y)$  de l'origine ne dépasse pas  $1$  si et seulement si il se trouve à l'intérieur du premier quadrant délimité par le cercle d'origine  $(0, 0)$  et de rayon  $1$ . Or cette région est d'aire  $\frac{\pi}{4}$ . D'où la probabilité recherchée vaut  $\frac{\pi}{4}$ .



$$Pr(\text{Zone Hachurée}) = \frac{\pi}{4} \approx 0.78539816$$

**Exemple 2.** Une procédure génère les réels  $X$  et  $Y$  uniformément et indépendamment dans l'intervalle  $[a, b]$ , où  $a < b$ , et en retourne le maximum. Quelle la probabilité pour que la valeur retournée soit  $\leq z \in [a, b]$ ? Pour qu'elle appartienne à l'intervalle  $[c, d] \subset [a, b]$ ?

**Solution.** Soit  $Z = \max\{X, Y\}$ . Pour tout  $z \in [a, b]$ , on a  $Z \leq z$  si et seulement si  $X \leq z$  et  $Y \leq z$ . La probabilité de chacun de ces deux événements est  $\frac{z-a}{b-a}$ . Ils sont de plus indépendants et, donc :

$$Pr(Z \leq z) = \frac{(z - a)^2}{(b - a)^2}.$$

On en déduit :

$$Pr(c < Z \leq d) = \frac{(d - a)^2}{(b - a)^2} - \frac{(c - a)^2}{(b - a)^2}.$$

# Fonction de Répartition

Dans la suite, nous introduisons la fonction de répartition et la densité (lorsqu'elle existe) pour les mesures de probabilités définies sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ .

Soit  $Pr$  une mesure de probabilité. Sa *fonction de répartition* (f.r.)  $F$  est définie par :

$$F(t) = Pr (] - \infty, t]), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

## Propriétés

Nous admettons les deux propositions suivantes sur les f.r.

**Proposition.** La f.r.  $F$  est croissante, à valeur dans  $[0, 1]$ , continue à droite et telle que  $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 1$  et  $\lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = 0$ .

La proposition suivante permet de caractériser une loi de probabilité en termes de sa f.r.

**Proposition.** Soit  $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  croissante, continue à droite et telle que  $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 1$  et  $\lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = 0$ . Alors il existe une mesure de probabilité unique  $P_r$  sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  dont la f.r. est  $F$ .

# Densité

Soit  $F$  la f.r. de la distribution  $Pr$ . S'il existe une fonction  $f$  telle que :

$$F(t) = \int_{-\infty}^t f(x)dx, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

alors cette fonction  $f$  s'appelle *densité* de  $Pr$ . La f.r. étant croissante, si la densité  $f$  existe, son intégrale de  $-\infty$  à  $t$ , doit valoir  $F(t)$ . Donc, on peut définir la densité  $f$  comme la dérivée de de la f.r., si cette dernière en admet une.

## Quelques Exemples Simples

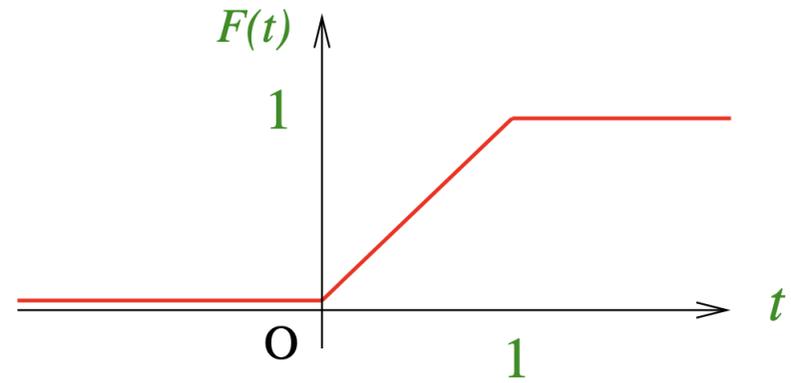
**Exemple 1.** Soit  $Pr$  la distribution uniforme sur  $[0, 1]$ , donnée par  $Pr(\langle a, b \rangle) = l([0, 1] \cap \langle a, b \rangle)$ , pour tout intervalle  $\langle a, b \rangle$ , où l'application  $l$  désigne la *longueur* d'un intervalle.

La f.r. est donnée par :

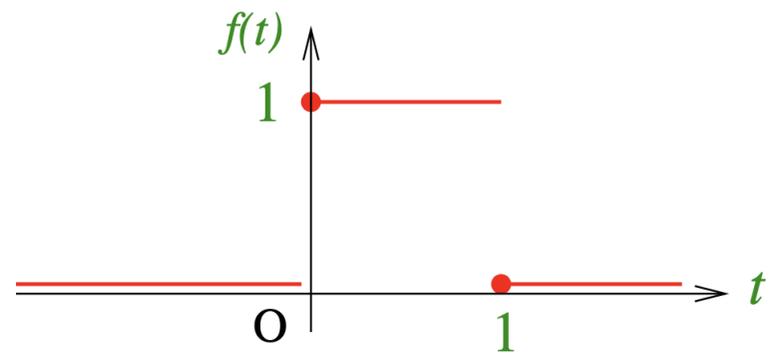
$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

Elle admet la densité :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$



Fonction de répartition de la loi uniforme



Densité de la loi uniforme

**Exemple 2.** Soit  $Z$  la valeur maximale de deux réalisations indépendantes de la loi uniforme dans  $[0, 1]$ , fournie par l'exemple précédent. Nous avons :

$$Pr(Z \leq t) = Pr(X \leq t \text{ et } Y \leq t) = t^2, \quad \forall t \in [0, 1].$$

On en déduit :

$$F_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t^2 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

Cette f.r. admet la densité :

$$f_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 2t & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$