Variables Aléatoires à Valeurs dans $\mathbb{R}$

Le concept de *variable aléatoire* introduite comme une application X de l'espace discret des événements dans $\mathbb{R}$ se généralise pour un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, Pr)$ quelconque.

Nous admettons la proposition suivante :

Proposition. Une application X de Ω dans $\mathbb{R}$ est une v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, Pr)$ ssi $X^{-1}(]-\infty, x]) = \{X \leq x\} \in \mathcal{A}$.

Définition. On appelle *fonction de répartition* (f.r.) F de le v.a. X la f.r. de la loi de probabilité de X :

$$F(t) = Pr(X \leq t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Exemple. Soit le réel U uniformément généré dans l'intervalle $[0, 2]$. On définit l'application X par $X(u) = u^2$. étudier X et en donner la f.r., s'il s'agit d'une v.a.

Solution. La f.r. de U est donnée par :

$$F_U(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ \frac{t}{2} & \text{si} \quad 0 \leq t < 2 \\ 1 & \text{si} \quad t \geq 2. \end{cases}$$

L'application X est bien une v.a., puisque l'image inverse d'un sous-intervalle $\langle a, b\rangle$ de $[0, 4]$ par X est le sous-intervalle $\langle \sqrt{a}, \sqrt{b}\rangle$ de $[0, 2]$.

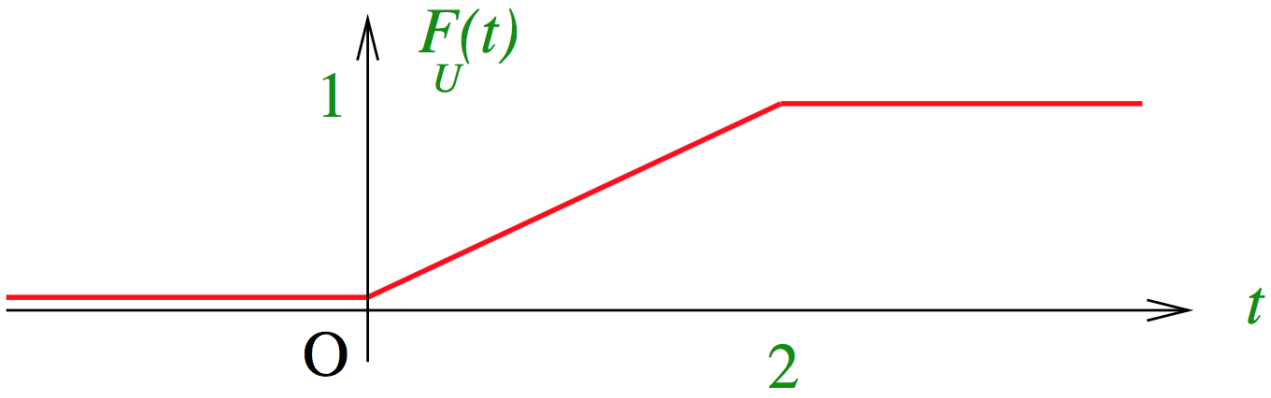
Pour calculer le f.r. de X, nous remarquons d'abord que $F_X(x)$ vaut 0 pour $x < 0$ et 1 pour $x \geq 4$. Ses valeurs non triviales sont obtenues pour $0 \leq x \leq 4$.

Soit $x \in [0,4]$. Nous avons :

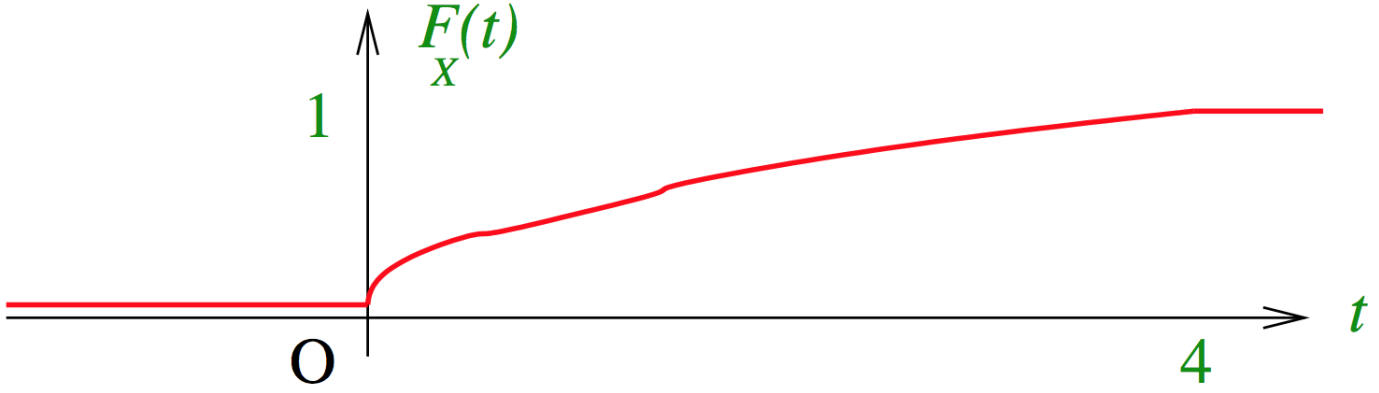
$$F_X(x) = Pr(X \leq x) = Pr(U \leq \sqrt{x}) = F_U(\sqrt{x}) = \sqrt{x}/2.$$

D'où :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \frac{\sqrt{x}}{2} & \text{si} \quad 0 \leq x < 4 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 4. \end{cases}$$



Fonction de répartition de U tiré uniformément dans $[0,2]$



Fonction de répartition de $X=U^2$

Probabilité Conditionnelle

Le concept de conditionnement introduit pour les espaces discrets s'étend sans difficulté aux espaces quelconques

Définitions. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, Pr)$ un espace probabilisé et soit $A \in \mathcal{A}$ de probabilité non nulle. On définit une application $Pr(./A)$ de $\mathcal{A}$ dans $[0, 1]$, par :

$$Pr(B/A) = \frac{Pr(A \cap B)}{Pr(A)}, \quad \forall B \in \mathcal{A}.$$

Elle est appelée *probabilité conditionnelle sachant* A. Le nombre $Pr(B/A)$ est appelé *probabilité conditionnelle de* B sachant A.

On démontre facilement que le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, Pr(./A))$ est un espace probabilisé. Il est appelé *espace probabilisé conditionné par* A.

On remarque aussi que la probabilité d'une intersection peut s'écrire en termes de probabilité conditionnelle :

$$Pr(A \cap B) = Pr(A)Pr(B/A).$$

On dit alors que l'on a effectué un *conditionnement*.

On démontre aussi facilement la proposition suivante.

Proposition. Soit $A_1, A_2, ..., A_n$ une partition de Ω dans $\mathcal{A}$, telle que $Pr(A_i) \neq 0, i = 1, ..., n$. Alors, pour tout $B \in \mathcal{A}$, on a :

$$Pr(B) = \sum_{i=1}^{n} Pr(A_i)Pr(B/A_i).$$

La définition d'*indépendance* pour les événements d'un espace généralisé est tout à fait identique à celle d'un espace discret.

Espérance des v.a. Continues

Définitions

- **(v.a. positives)** Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, admettant la densité f. Son *espérance* est définie par :

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx,$$

si l'intégrale converge. Si elle diverge, on dit que X *n'admet pas d'espérance*.

- **(v.a. de signe quelconque)** Soit X une v.a. réelle. Décomposons X en partie positive et partie négative : $X = X^+ - X^-$, avec $X^+ = \max\{X, 0\}$ et $X^- = -\min\{X, 0\}$. Si X^+ et X^- admettent toutes deux une espérance, on dit que X *admet l'epérance* :

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}X^+ - \mathbb{E}X^-.$$

Sinon, on dit que X *n'admet pas d'espérance.*

Quelques Exemples

Exemple 1 (Loi Uniforme). Soit la v.a. X uniformément répartie dans $[a, b]$, avec $a < b$. Elle admet la densité :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < a \\ \frac{1}{b-a} & \text{si} \quad a \leq x < b \\ 0 & \text{si} \quad x \geq b. \end{cases}$$

Nous avons :

$$\mathbb{E}X = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \left[\frac{x^2}{2(b-a)} \right]_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}.$$

Il est à noter qu'on peut calculer l'espérance de toute v.a. de la forme $\varphi(X)$ par une intégration similaire. Par exemple l'espérance de X^2 vaut :

$$\mathbb{E}X^2 = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx = \left[\frac{x^3}{3(b-a)}\right]_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2+a^2+ab}{3}.$$

Exemple 2 (Loi Normale). La distribution que nous allons introduire a un rôle central en statistique. Elle est appelée aussi *loi gaussienne* ou *loi de Laplace-Gauss*. Elle intervient en effet dans la modélisation probabiliste d'un nombre de grandeurs physiques observée un grand nombre de fois.

Soit X une v.a. réelle. On dit que X *suit une loi normale de paramètres* m et σ, si elle admet la densité :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

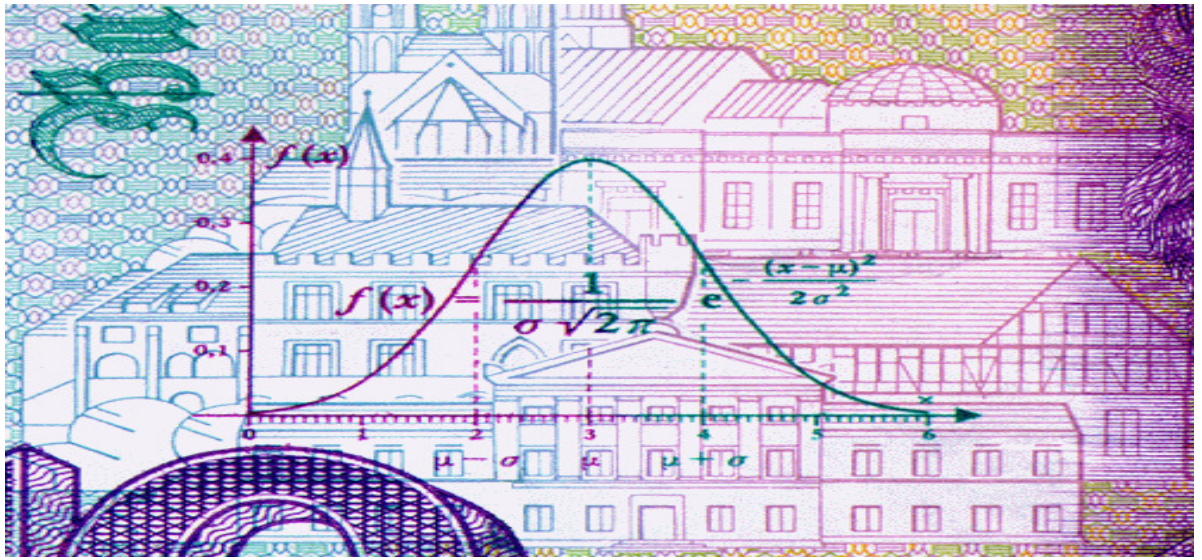
Il est d'usage de noter une telle distribution par $\mathcal{N}(m, \sigma)$.

Pour prouver qu'il s'agit d'une densité, il faut montrer que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. Pour ce faire, on introduit d'abord le changement de variable $y = \frac{x-m}{\sqrt{2}\sigma}$. Ensuite l'application de l'équation :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$$

permet de confirmer l'identité souhaitée.

Gauss et sa courbe



Quelques Exemples (suite)

Espérance de la loi normale. Pour la v.a. X de paramètres m et σ, nous avons :

$$\mathbb{E}X = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) dx.$$

Introduisons le changement de variable $y = \frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}}$, il vient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{2}\sigma y + m) e^{-y^2} dy \\ &= \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y e^{-y^2} dy + \frac{m}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy. \end{aligned}$$

La première intégrale vaut :

$$\int_{-\infty}^{\infty} y e^{-y^2} dy = \left[-\frac{e^{-y^2}}{2} \right]_{-\infty}^{\infty} = 0,$$

et la seconde :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}.$$

D'où $\mathbb{E}X = m$.

Exemple 4 (Loi Exponentielle). Cette loi a beaucoup d'importance dans l'étude des files d'attentes. Elle possède en effet la propriété "sans mémoire" qui la distingue des autres lois possédant une densité.

On dit que la v.a. réelle à valeurs positives X *suit une loi exponentielle de paramètre* $\lambda > 0$, si elle admet la densité :

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \ x \in \mathbb{R}^{+}.$$

On démontre facilement que $\int_0^\infty f(x)dx = 1$. On en déduit que f est bien une densité. On peut calculer facilement la f.r. de X. Nous avons en effet :

$$F(t) = \int_0^t f(x)dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Nous avons en particulier $Pr(X > t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t}$. On en déduit, pour $s, t > 0$:

$$\begin{aligned} Pr(X > s + t \ / \ X > s) &= \frac{Pr(X>s+t \text{ et } X>s)}{Pr(X>s)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} \\ &= e^{-\lambda t} \\ &= Pr(X > t). \end{aligned}$$

Cette propriété est appelée "*sans mémoire*".

On peut montrer que, réciproquement, si une loi, admettant une densité, est sans mémoire, alors elle est exponentielle.

L'espérance de loi exponentielle se calcule facilement et on a :

$$\mathbb{E}X = \int_0^\infty \lambda x e^{-\lambda x} dx.$$

Effectuant d'abord le changement de variable $y = \lambda x$, ensuite une intégration par partie permet d'écrire :

$$\mathbb{E}X = \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty y e^{-y} dy = \frac{1}{\lambda}.$$

Propriétés de l'espérance

Dans la suite nous considérons les v.a. admettant une densité. Les propriétés énumérées sont vraies dans le cas général.

Linéarité de l'espérance

Théorème. Soient X et Y deux v.a. définies sur le même espace et soient α et β deux réels quelconques. Alors :

$$\mathbb{E}(\alpha X + \beta Y) = \alpha\ \mathbb{E}X + \beta\ \mathbb{E}Y.$$

Produit

Théorème. Soient X et Y deux v.a. sur le même espace et indépendantes d'espérance finie. Alors la v.a. XY admet une espérance et $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}X \ \mathbb{E}Y$.

****

Définition. Une v.a. est dite *centrée* si son espérance est 0. Si la v.a. X admet l'espérance $\mathbb{E}X$, alors la v.a. $Y = X - \ \mathbb{E}X$ est centrée.

Variance

Définitions. Soit X une v.a. admettant une espérance. La *variance* de X est définie par :

$$\mathbb{V}X = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2,$$

si cette espérance existe. La racine carrée de la varinace est appelée *écart-type* et est notée par σX.

Si une v.a. est de variance 1, on dit qu'elle est *réduite*.

Propriétés de la Variance

Proposition. On a :

- $\mathbb{V}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$.
- $\mathbb{V}(\alpha X) = \alpha^2 \, \mathbb{V}X$.
- $\mathbb{V}(X + a) = \mathbb{V}X$.

Proposition. Si les v.a. X et Y sont indépendantes, alors :

$$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}X \; + \; \mathbb{V}Y.$$

Nous calculons dans la suite la variance pour les 3 lois dont l'espérance a été calculée.

Exemple 1 (Loi Uniforme). Rappelons la densité de la loi uniforme étant définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < a \\ \frac{1}{b-a} & \text{si} \quad a \leq x < b \\ 0 & \text{si} \quad x \geq b. \end{cases}$$

Nous avons :

$$\mathbb{E}X^2 = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx = \left[\frac{x^3}{3(b-a)}\right]_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}.$$

D'où :

$$\mathbb{V}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \frac{(b+a)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Exemple 2 (Loi Normale). Nous avons :

$$\mathbb{E}X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) dx.$$

Le changement de variable $y = \frac{x-m}{\sqrt{2}\sigma}$ permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X^2 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (y\sqrt{2}\sigma + m)^2 e^{-y^2} dy \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-y^2} dy + 2m\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y e^{-y^2} dy \\ &\quad + \frac{m^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy. \end{aligned}$$

Or :

$$\int_{-\infty}^{\infty} y e^{-y^2} dy = 0$$

et :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \ = \sqrt{\pi}.$$

Pour la première intégrale figurant dans le calcul de $\mathbb{E}X^2$, la méthode d'intégration par partie conduit à :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-y^2} dy &= \left[-y\frac{e^{-y^2}}{2}\right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-y^2}}{2} dy \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \end{aligned}$$

On en déduit $\mathbb{E}X^2 = \sigma^2 + m^2$ et donc :

$$\mathbb{V}X \ = \sigma^2.$$

L'espérance et l'écart-type d'une loi normale de type $\mathcal{N}(m, \sigma)$ ne sont donc que les paramètres m et σ de la loi.

Exemple 3 (Loi Exponentielle). Nous avons :

$$\mathbb{E}X^2 = \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

Le changement de variable $y = \lambda x$ permet d'écrire :

$$\mathbb{E}X^2 = \frac{1}{\lambda^2} \int_0^\infty y^2 e^{-y} dy$$

Ce qui vaut $\frac{2}{\lambda^2}$ (voir la fonction Γ). On en déduit :

$$\mathbb{V}X = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Convergence Stochastique

Proposition (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev). Soit X une v.a. d'espérance μ et de variance V. Alors, pour tout $\epsilon > 0$:

$$Pr\left(|X - \mu| \geq \epsilon\right) \leq \frac{V}{\epsilon^2}.$$

Dans la suite, nous étudions très sommairement certaines notions d'approximation pour une suite de v.a. Il existe plusieurs définitions de convergences pour une suite de v.a. Elles ne sont pas équivalentes et certaines sont plus fortes que d'autres. Les convergences que nous allons considérer sont parmi les plus simples.

Nous en avons, d'ailleurs, déjà cité deux exemples portant sur la loi binomiale. Soit X_n une suite de v.a. binomiales de paramètres λ et n. Alors :

- Si p reste fixé et que n tend vers ∞, alors $Pr\left(|\frac{X_n}{n} - p| \geq \epsilon\right) \rightarrow 0$, quel que soit $\epsilon > 0$.
- Si n tend vers ∞ et p tend vers 0 tels que $np \rightarrow \lambda > 0$, alors $Pr(X_n = k)$ tend vers $e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ (i.e. une distribution de Poisson).

Il est évident que ces deux modes de convergence, l'un pour $\frac{X_n}{n}$ et l'autre pour X_n, sont distincts : le premier confirme que $\frac{X_n}{n}$ s'approche *avec une quasi-certitude vers* p alors que le second montre que X_n *suit asymptotiquement* une loi de Poisson.

Définitions. Soit $X_n, n \in \mathbb{N}$ une suite de v.a. et soit X_n une v.a. quelconque.

- On dit que la suite X_n *converge en probabilité vers la v.a.* X, si pour tout $\epsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} Pr\left(|X_n - X| \geq \epsilon\right) \;=\; 0.$$

- On dit que la suite X_n *converge en loi vers la v.a.* X, si pour tout a point de continuité de la f.r. de X :

$$\lim_{n\to\infty} Pr(X_n \leq a) \;=\; Pr(X \leq a),$$

autrement dit, la f.r. $F_n(x)$ de X_n converge vers la f.r. $F(x)$ de X en tout point de continuité de $F(x)$.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev (pour les v.a. réelles) permet de généraliser la loi des grands nombres pour les suites de v.a. indépendantes et identiquement distribuées (qui ne sont pas nécessairement discrètes).

Théorème (Loi faible des Grands Nombres). Soit X_n une suite de v.a. indépendantes et identiquement distribuées, admettant chacune l'espérance μ et la variance V. Alors la suite des v.a. constituées de leurs moyennes arithmétiques, i.e. la suite $M_n = \frac{1}{n}\sum_1^n X_i$ converge en probabilité vers μ.

Théorème Central Limite

La loi des grand nombre est très importante. Elle établit en effet un pont entre des prévisions probabilistes et des confirmations qui frisent la quasi-certitude. Mais pour en arriver là, un grand nombre de répétitions d'épreuve est nécessaire. Malheureusement la loi ne nous dit rien sur la vitesse de convergence vers la certitude.

Le théorème central limite a pour objectif de remédier à ce problème en multipliant l'écart entre la valeur aléatoire (la moyenne) et la valeur certaine approchée (l'espérance) par la racine carrée de de n.

Théorème (Central limite). Soit X_n, $n = 1, 2, 3, ...$, une suite de v.a. indépendantes et identiquement distribuées, admettant chacune l'espérance μ et la variance $V = \sigma^2 > 0$. Soit M_n la valeur moyenne de la suite :

$$M_n \ = \ \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} X_n.$$

Alors la suite $\sqrt{n}\ (M_n - \mu)$ converge en loi, lorsque $n \to \infty$, vers une v.a. normale centrée et de variance σ^2. Nous avons donc, pour tout intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty} Pr\left(\sqrt{n}\ (M_n - \mu) \ \in \ [a, b]\right) \ = \ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx.$$