

TD N° 2 : Indépendance, séries génératrices, distributions classiques.

Exercice 1. Indépendance

1. Soit A et B deux événements indépendants sur un espace de probabilité Ω . On note \bar{A} et \bar{B} leur complémentaires respectifs.

Montrez que les événements \bar{A} et B sont indépendants. De même montrez que \bar{A} et \bar{B} sont indépendants.

2. On considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes sur l'espace Ω .

– Montrez que $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

– Montrez que pour deux ensembles quelconques $E = \{x_1, \dots, x_k\}$, $F = \{y_1, \dots, y_l\}$ on a l'égalité

$$\mathbb{P}(X \in E, Y \in F) = \mathbb{P}(X \in E) \mathbb{P}(Y \in F).$$

En déduire la probabilité de l'événement " $X \in E$ ou $Y \in F$ ".

– Montrez que si f est une fonction quelconque et que l'on note $Z = f(Y)$ alors les variables aléatoires X et Z sont indépendantes.

Exercice 2.

Une population étudiée comporte 60% de femmes et 40% d'hommes. On sait par ailleurs que 30% des femmes portent les cheveux courts et que 10% des hommes portent les cheveux longs.

1. Calculer la probabilité qu'une personne choisie au hasard porte des cheveux courts.

2. Calculer la probabilité qu'une personne portant des cheveux longs soit une femme.

Exercice 3. Pile ou face

On tire à pile ou face $2n$ fois de suite. On décrit cette expérience par l'espace de probabilité $\Omega = \{P, F\}^{2n}$ et on suppose que chaque événement atomique est équiprobable. On considère les variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_{2n} définies par : $X_i(w) = 1$ si on obtient "pile" au i^{me} lancer et $X_i(w) = 0$ sinon.

– Quelle est la fonction génératrice de la variable X_i ? En déduire son espérance, sa variance.

– Soit la v.a. $S = \sum_{i=1}^{2n} X_i$. Calculez la fonction génératrice de S . Quel est le coefficient de z^n dans cette série? En déduire la probabilité "d'obtenir autant de pile que de faces". Calculer l'espérance de S et sa variance.

Exercice 4.

On possède une pièce de monnaie truquée de telle sorte que la probabilité d'obtenir pile soit $0,3$.

1. On lance 10 fois la pièce. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 fois pile ?
2. On lance la pièce jusqu'à ce que l'on obtienne pile pour la première fois. Combien effectuera-t-on en moyenne de lancers ?