Algorithmes distribués probabilistes

A. Zemmari

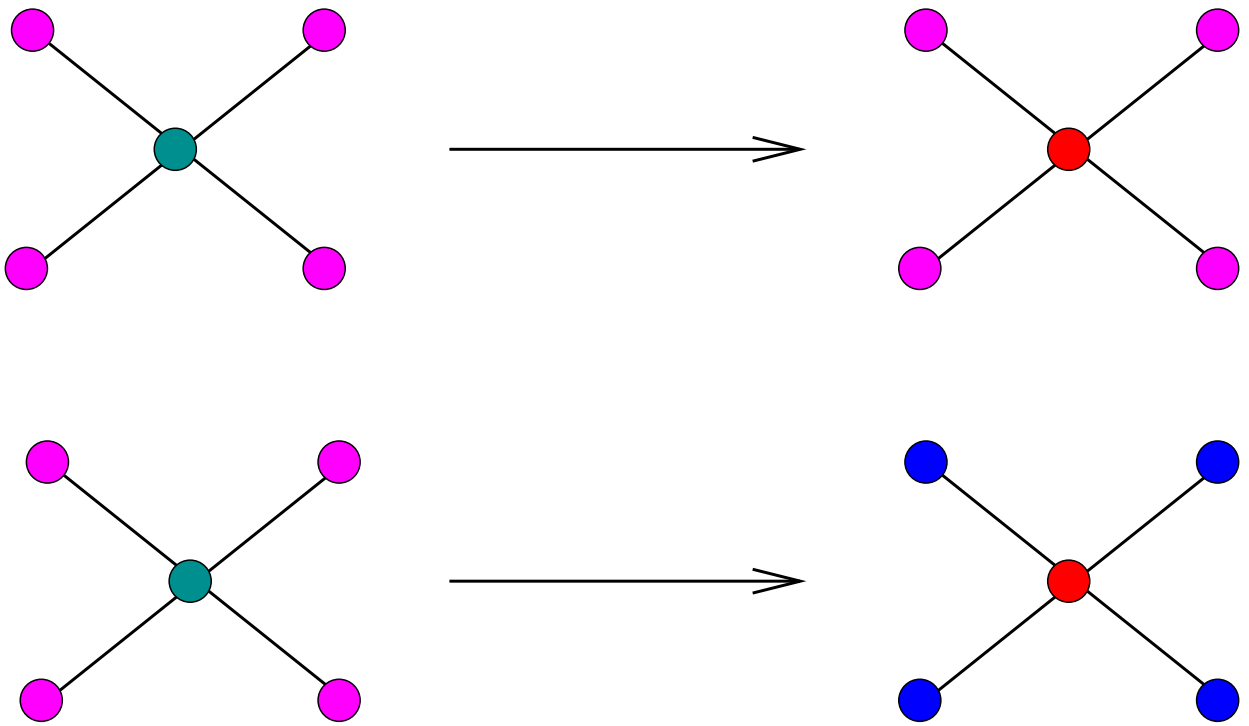
LaBRI - Université Bordeaux 1

14 octobre 2010

Preblème 2. Elections locales et ensemble stable

Elections locales : Présentation

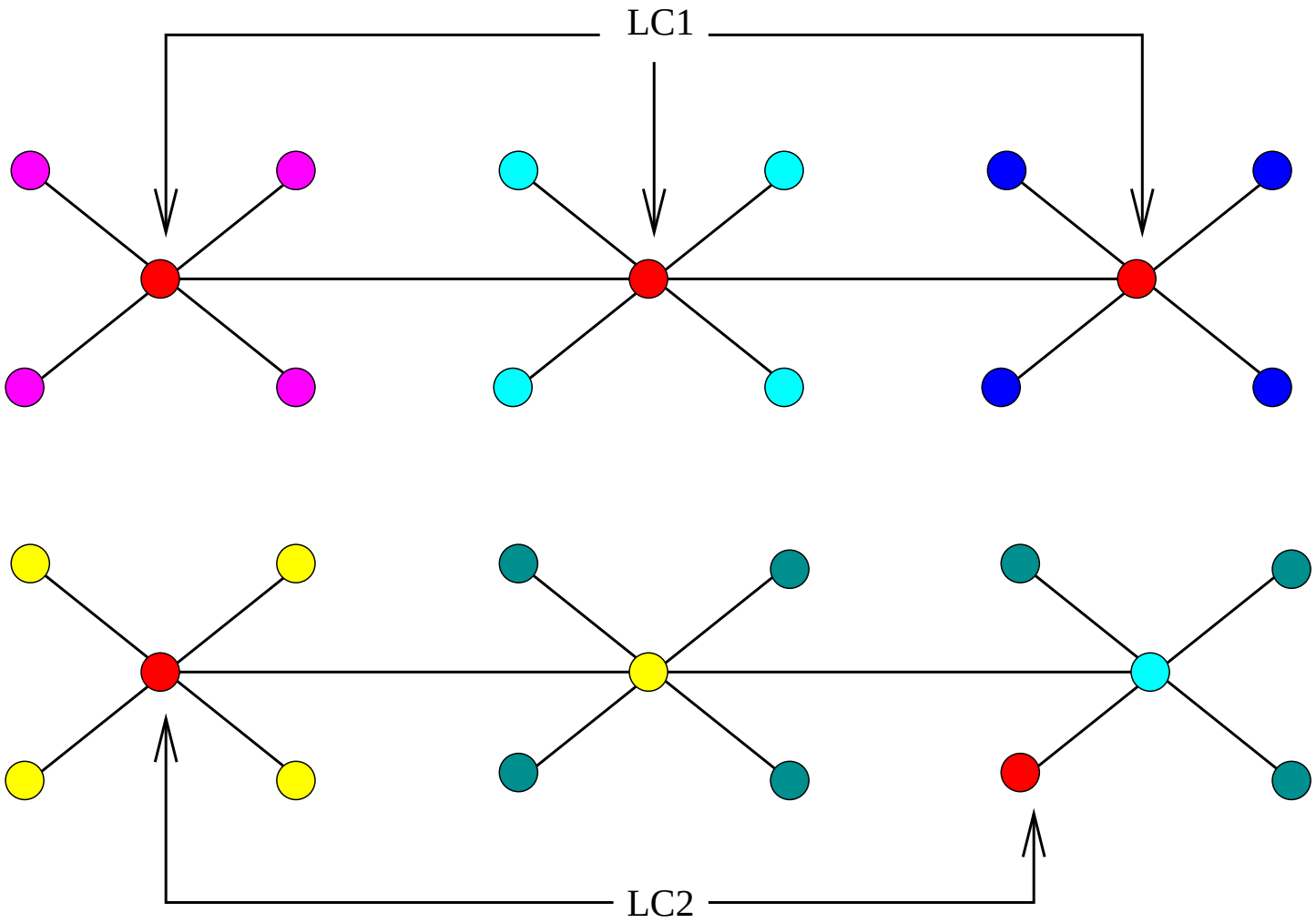
Un des modèles de communication de base dans le cas des algorithmes distribués codés par les calculs locaux :les règles de réécriture sont de la forme :



Types de synchronisations locales

- LC1 : dans une étape de calcul, seule l'étiquette du sommet centre de la boule change, et ceci en fonction des étiquettes des autres sommets de la boule.
- LC2 : dans une étape de calcul, toutes les étiquettes des sommets de la boule changent

Types de synchronisations locales (2)



Implémentation

- LC1 : chaque sommet v répète indéfiniment les actions suivantes :
  v tire un nombre aléatoire $rand(v)$;
  v envoie $rand(v)$ à tous ses voisins;
  v reçoit tous les nombres envoyés par ses voisins;
  (* v est localement élu dans $B(v, 1)$ si $rand(v)$ est strictement plus grand que $rand(w)$, pour tout w voisin de v *)

Questions posées

- Quelle est la probabilité de succès (au même sens que pour le problème du rendez-vous)?
- Quel est le nombre moyen de synchronisations LC1 dans le graphe ?
- Peut-on utiliser cette procédure pour réaliser un MIS ?

Probabilité d'élection pour un sommet

Chaque sommet v tire un nombre aléatoire et uniforme d'un ensemble $\{1, 2, \cdots, N\}$.
Soit $X \subset V$ tel que $v \in X$, soit $k = |X|$,

$$(1) \quad Pr\left(rand(v) > rand(w),\ \forall w \in X - \{v\}\right) = \frac{1}{N} \sum_{i=2}^{N} \left(\frac{i-1}{N}\right)^{k-1}$$

Et

$$(2) \quad \forall v, w \in X, Pr(rand(v) = rand(w)) = 1/N.$$

Probabilité d'élection pour un sommet (2)

- Propositions :
  - La probabilité pour un sommet v d'être localement élu dans une L1-election est donnée par :

$$p_1(v) = \frac{1}{d(v)+1}$$

- Preuve : application directe de (1)

Probabilité d'élection pour un sommet (3)

- Corollaire : Soit v un sommet de G. Le temps moyen d'attente pour qu'il soit localement élu dans une L1-élection est $d(v) + 1$.
- Exemples :
  - Si G est un anneau de taille n, alors pour tout v, $p_1(v) = 1/3$.
  - Si G est un graphe complet de taille n, alors pour tout v, $p_1(v) = 1/n$.

Probabilité de succès

- Probabilité d'au moins une élection locale dans le graphe $= 1$
- Preuve : Soient v, w deux sommets voisins,

$$Pr(rand(v) = rand(w)) \longrightarrow 0 \text{ si } N \longrightarrow \infty \text{ (d'après (2))}$$

Espérance du nombre d'élections locales

- Notations : $X(G)$ le nombre de sommets localement élus dans une L1-élection.
- Proposition :

$$\mathbb{E}(X(G)) = \sum_{v \in V} \frac{1}{d(v)+1}$$

- Exemples :
  - $\mathbb{E}(X(C_n)) = n/3$
  - $\mathbb{E}(X(K_n)) = 1$

Problème du MIS

Définitions.

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un *ensemble indépendant* est un sous-ensemble I de V tel que :

$$\forall u, v \in U, \ \{u, v\} \notin E,$$

L'ensemble U est *maximal* si $\forall v \in V \setminus U$, $U \cup \{v\}$ n'est pas un ensemble indépendant.

Implémentation avec des rééls - Algorithme $\mathcal{A}$

Une phase de l'algorithme :

- chaque sommet u, encore dans le graphe, génère un nombre aléatoire réel $x(u)$;
- u envoie $x(u)$ à tous ses voisins encore dans le graphe;
- u reçoit $x(v)$ de chaque voisin, encore dans le graphe

$\Rightarrow$ u est inclu dans le MIS si $x(u)$ est un minimum local, c-à-d, $x(u) < x(v)$ pour chaque voisin v de u.

Remarque. Il s'agit d'un algorithme qui réutilise la procédure d'élections locales

Analyse de l'algorithme

Lemma.

En moyenne, chaque phase supprime au moins la moitié des arêtes du graphe risiduel.

Théorème.

Il existe deux constantes k_1 et K_1 telles que pour tout graphe G à n sommets, le nombre de phases nécessaires pour supprimer toutes les arêtes de G est

- inférieur à $k_1 \log n$ en moyenne,
- inférieur à $K_1 \log n$ avec forte probabilité $(1 - o(\frac{1}{n}))$.

Analyse de l'algorithme

Lemma.

En moyenne, chaque phase supprime au moins la moitié des arêtes du graphe risiduel.

Théorème.

Il existe deux constantes k_1 et K_1 telles que pour tout graphe G à n sommets, le nombre de phases nécessaires pour supprimer toutes les arêtes de G est

- inférieur à $k_1 \log n$ en moyenne,
- inférieur à $K_1 \log n$ avec forte probabilité $(1 - o(\frac{1}{n}))$.

Algorithme $\mathcal{B}$: Un algorithme à base de bits

Idée principale : simuler l'échange de réels par l'échange de bits donnant le représentation en binaire du nombre réel.

Une phase of d'échange de réels est remplacée par une phase composée d'une séquence de rounds

Algorithme $\mathcal{B}$: Un algorithme à base de bits

Dans chaque round :

- u génère uniformément un bit $b(u) \in \{0, 1\}$;
- u envoie $b(u)$ à tous ses voisins encore actifs;
- u reçoit $b(v)$ de chaque voisin encore actif v,
- u prends une décision :
  - u est $IN - MIS$
  - u est $NOT - IN - MIS$
  - u est $INELIGIBLE$: quand un sommet u envoie ce message, cela veut dire que jusqu'à la fin de la phase courante, u ne peut être dans le MIS.

Analyse de l'algorithme $\mathcal{B}$

Théorème.

L'algorithme $\mathcal{B}$ construit un MIS, pour tout graphe de taille $n \geq 1$ en $O(\log^2 n)$ échanges de bits et ce en moyenne et avec forte probabilité.

Algorithme $\mathcal{C}$: Un algorithme optimal

Idée principale : desynchroniser les phases entre les arêtes dans l'algorithme $\mathcal{B}$

Si, dans un round, u brise la symétrie avec v_1 mais pas avec v_2, alors u considère qu'il a terminé une phase avec v_1 et démmarre, par anticipation, une nouvelle phase avec v_1 tout en continuant la phase actuelle avec v_2.

Algorithme $\mathcal{C}$: Un algorithme optimal

Idée principale : desynchroniser les phases entre les arêtes dans l'algorithme $\mathcal{B}$

Si, dans un round, u brise la symétrie avec v_1 mais pas avec v_2, alors u considère qu'il a terminé une phase avec v_1 et démmarre, par anticipation, une nouvelle phase avec v_1 tout en continuant la phase actuelle avec v_2.

Analyse de l'algorithme $\mathcal{C}$

Théorème.

L'algorithme $\mathcal{C}$ calcule un MIS en $O(\log n)$ phases avec probabilité $1 - o(n^{-1})$.

Preuve. Raisonner sur les arêtes + Utiliser la borne de Chernoff.

Références

- Y. Métivier, N. Saheb, A. Zemmari: Randomized local elections. Inf. Process. Lett. 82(6): 313-320 (2002)
- Y. Métivier, J. M. Robson, N. Saheb-Djahromi, A. Zemmari: An Optimal Bit Complexity Randomized Distributed MIS Algorithm, to appear in Distributed Computing