

Aspects combinatoires et probabilistes d'un système de particules

Rapport de stage de M2

Zoé Varin
ENS de Lyon

Encadrée par **Jean-François Marckert**
LaBRI, Université de Bordeaux

Février–Juin 2021

Résumé

On s'intéresse à un modèle de golf aléatoire (qui est un modèle particulier de système de particules) : on dispose d'un graphe $G = (V, E)$, connexe (par la suite, ce sera le plus souvent $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ou \mathbb{Z}), des balles (chaque sommet d'un sous ensemble des sommets B porte une balle par sommet), des trous T (un sous ensemble de sommets disjoint de B , à la capacité d'absorber les balles, une par sommet). Le joueur joue successivement les balles, et sa maladresse le fait jouer au hasard : les trajectoires des balles suivent une chaîne de Markov irréductible, jusqu'à un trou. Question : quelle est la loi des trous qui restent libre à la fin, lorsque le joueur a joué toutes les balles, et que celles-ci ont été absorbées ? On répond à cette question sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, et sur \mathbb{Z} . Cela nous amène à utiliser de nombreux outils, tant probabilistes, par exemple avec des outils de théorie de la mesure et de théorie ergodique, que combinatoires.

Conventions. Toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace de probabilité commun $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On note toutes les variables aléatoires en gras. Par exemple, \mathbf{X} est une variable aléatoire, tandis que X est simplement un état quelconque.

1 Introduction

Les systèmes de particules : Un *système de particules* sur un graphe $G = (V, E)$ fini ou dénombrable (en anglais on parle d'*interacting particle system*) est un processus de Markov en temps continu (ou parfois discret), sur un espace de la forme $\{0, \dots, k\}^V$, l'ensemble des coloriage de ce graphe par $k + 1$ couleurs. Souvent, G est un réseau de la forme \mathbb{Z}^d . Chaque couleur est un état possible pour un sommet. Par exemple, si $k = 1$, on peut interpréter un 1 comme la présence d'une particule, et un 0 comme son absence. Les règles d'évolution du système sont locales et aléatoires, c'est-à-dire que l'état global du système évolue localement selon une certaine dynamique, à des temps aléatoires (ou pas), dont les *taux de saut* dépendent également de propriétés locales de la configuration.

Par exemple, le système appelé ASEP (pour *asymmetric simple exclusion process*), est un processus sur $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$, dans lequel chaque particule, indépendamment des autres, attend un temps suivant une loi exponentielle, puis saute à droite avec proba p , à gauche avec proba q (avec $p, q \geq 0$ et $p + q = 1$), s'il n'y a pas déjà de particule là où elle souhaite sauter (sinon, elle reste sur place). Ensuite elle attend de nouveau pendant un temps aléatoire exponentiel, réessaye de se déplacer, et ainsi de suite. Ce modèle est notamment décrit et analysé dans [Lig99, partie III, section 2].

Les systèmes de particules ont été très étudiés, en tant que sujet de recherche à part entière, depuis une cinquantaine d'années. On pourra notamment se référer à [Lig05] et [Swa20] pour un bon aperçu de l'étendue du domaine. D'abord, les probabilistes voient les systèmes de particules comme des processus temporels, à valeurs mesures : la loi du système, c'est-à-dire, la probabilité d'observer une certaine configuration évolue avec le temps. Connaître la loi μ^t du système au temps t est la question générique, en général difficile ; d'autres questions concernent l'existence et l'unicité de mesures invariantes (les mesures μ^t constantes sous l'action du système), ainsi que les questions concernant la convergence de

μ^t vers une mesure invariante par exemple. En fait, d'un point de vue probabiliste, parfois la seule définition du processus est difficile à prouver (notamment lorsque le nombre de couleurs est infini)

Un certain nombre de modèles possèdent des propriétés algébriques remarquables, et sont étudiés par des méthodes algébriques, et même combinatoires. Par exemple, dans le cas des processus d'exclusion, un des modèles a pu être résolu complètement de manière algébrique, exprimant le poids d'états stables comme produits de matrices [DEHP93], tandis que de nombreux progrès ont été faits sur une légère variante de ce modèle avec des méthodes combinatoires, en utilisant des tableaux [CW11]. Enfin, les physiciens utilisent les systèmes de particules en tant que modèle théorique de systèmes physiques avec un grand nombre de particules ; on pensera notamment au modèle d'Ising, l'un des plus classiques car très pertinent malgré sa simplicité, qui permet de modéliser le comportement ferromagnétique de certains matériaux. Ce modèle est simple, mais permet par exemple de modéliser la perte de la propriété magnétique du fer lorsque la température atteint un seuil, modélisant correctement le changement de phase réel en question.

Le modèle que nous allons étudier est un système de nature légèrement différente. Comme dans les processus d'exclusion (dont le ASEP est un cas particulier), il ne peut y avoir deux particules au même emplacement, mais contrairement à ces derniers, une particule (on parlera de *balle* dans la suite) n'est activée qu'une seule fois : à ce moment, elle se déplace jusqu'à un autre sommet parmi ceux étant des *trous*, ayant la propriété d'absorber une balle, et s'arrête à jamais. Pour le définir, nous allons utiliser une analogie avec un modèle de golf aléatoire que l'on peut commencer par définir de manière un peu informelle.

Le modèle de golf : On considère le modèle de *golf*, ou de *parking aléatoire*, défini de la façon suivante : soit $G = (V, E)$ un graphe fini et connexe, $T \subseteq V$ un ensemble de *trous*, $B \subseteq V$ un ensemble de balles, tels que $B \cap T = \emptyset$. De plus, chaque balle est munie d'une horloge, que l'on note A_v pour celle sur le sommet v (par la suite, ces données seront aléatoires, mais pour l'instant, on peut supposer qu'elles sont déterministes). On supposera toujours que $|T| \geq N_b$, c'est-à-dire, qu'il y a plus de trous que de balles. On suppose par ailleurs que les horloges sont deux à deux distinctes.

Les balles effectuent des marches aléatoires jusqu'à trouver des sommets libres, où elles vont s'arrêter, de la manière suivante : une balle initialement en v , à l'instant donné par son horloge A_v , part de v , effectue une marche aléatoire (suivant une certaine chaîne de Markov, que l'on définira un peu plus bas) jusqu'à atteindre un sommet $t \in T$ libre, elle "tombe dans le trou", le bouche, et s'arrête (ce déplacement est immédiat, l'ensemble de la marche aléatoire effectuée par la balle avant de trouver un trou libre a lieu avant que n'importe quelle autre balle ne parte). Le trou perd alors sa capacité à absorber des balles. Lorsque les N_b balles ont été lancées, les trous résiduels, ceux qui n'ont pas absorbés de boules, et qui sont donc au nombre de $|T| - N_b$ forment un sous ensemble aléatoire des trous initiaux... **Quelle est la loi de cet ensemble aléatoire ?** C'est la question principale qui va nous occuper par la suite.

On s'intéresse donc à des objets aléatoires : il y a trois sources d'aléa indépendantes dans nos modèles. La position initiale des trous et des balles sur le graphe, les temps d'activation des balles, et leurs marches aléatoires.

- La loi initiale, μ_{init} est une loi sur $\text{Config}_{init} := \{\mathbf{b}, \mathbf{t}_L, \mathbf{n}\}^V$, qui spécifie la probabilité d'observer une certaine configuration initiale. Sur une configuration initiale, l'état \mathbf{b} correspond à un sommet porteur d'une balle, l'état \mathbf{t}_L à un trou libre, et enfin \mathbf{n} correspond à un emplacement vide. Par ailleurs, pour une configuration non initiale, on notera \mathbf{t}_O l'état d'un sommet correspondant à un trou occupé. Enfin, une fois une balle activée et partie de son sommet d'origine, ce sommet est donc vide, c'est à dire dans l'état \mathbf{n} .

Pour $\mathbf{X} \sim \mu_{init}$, la loi μ_{init} spécifie tous les nombres

$$\mathbb{P}((\mathbf{X}_v, v \in V) = (X_v, v \in V)),$$

avec $(X_v, v \in V) \in \text{Config}_{init}$.

À $\mathbf{X} \sim \mu_{init}$ on associe alors $\mathbf{B}^{init} = \{u \in V : \mathbf{X}_u = \mathbf{b}\}$ et $\mathbf{T}^{init} = \{u \in V : \mathbf{X}_u = \mathbf{t}_L\}$, respectivement l'ensemble de balles et l'ensemble de trous dans la configuration initiale.

Pour que notre modèle soit bien défini, on ne considérera par la suite, que des lois μ_{init} pour lesquelles, $|\mathbf{B}^{init}| \leq |\mathbf{T}^{init}|$ presque sûrement, c'est à dire pour lesquelles il y a au moins autant de trous libres que de balles (**Hypothèse (A)**).

- Les temps d'activation des balles, $(\mathbf{A}_v)_{v \in V}$ i.i.d. de loi μ_T sur \mathbb{R}^+ , sans atome (de sorte que deux marches ne sont jamais effectuées en même temps) (**Hypothèse (B)**). Ces temps d'activation donnent un ordre relatif entre les balles : si $A_v < A_u$, la balle v est partie et arrivée avant que la balle u soit partie.

Sur un graphe fini, la donnée des balles et de leurs temps d'activation revient à trier les balles en une suite de sommets sources S_1, \dots, S_{N_b} , et on utilisera parfois cette notation. Sur un graphe infini nous verrons que l'utilisation d'horloges est plus subtile, elle permet de définir un ordre total sur les balles, sans qu'il y ait de notion de "première balle". C'est plus naturel, en particulier si l'on veut considérer un processus avec des balles ayant des temps de départs indépendants les uns des autres.

- Les marches aléatoires des balles, du sommet initial de chaque balle à un sommet de T non touché par une des balles précédentes, suivent des chaînes de Markov irréductibles sur G , de noyau P (**Hypothèse (C)**).

Supposons maintenant que notre modèle de golf est défini en respectant les hypothèses (A), (B) et (C). On peut définir $\mathbf{X}^{(\text{fin})}$ la configuration finale, caractérisée par $\mathbf{T}^{\mathbf{L}}$ l'ensemble des trous finalement libres, et $\mathbf{T}^{\mathbf{O}}$ l'ensemble de ceux finalement occupés par une balle. On peut écrire $\mathbf{T}^{\mathbf{L}} = \text{AlgoGolf}(G, \mathbf{B}^{\text{init}}, \mathbf{T}^{\text{init}}, \mathbf{A}, P)$, où $\text{AlgoGolf}(G, B^{\text{init}}, T^{\text{init}}, A, P)$ est le processus qui à partir de la configuration initiale caractérisée par B^{init} , T^{init} et A , ordonne les balles et fait effectuer à chacune d'elle une marche aléatoire de noyau P jusqu'à un élément de T^{init} non déjà touché.

Lorsque toutes les hypothèses mentionnées plus haut sont vérifiées (hypothèses (A), (B) et (C)), on note enfin

$$\text{Golf}[G, \mu_{\text{init}}, \mu_T, P]$$

le modèle proposé. On a alors le théorème suivant :

Théorème 1 (bonne définition du modèle sur un graphe fini).

Dans le modèle $\text{Golf}[G, \mu_{\text{init}}, \mu_T, P]$, les variables aléatoires $\mathbf{T}^{\mathbf{L}}$, $\mathbf{T}^{\mathbf{O}}$ et $\mathbf{X}^{(\text{fin})}$ sont bien définies presque sûrement.

Preuve. Quand on considère un graphe fini, le processus est clairement bien défini : étant donné qu'il y a plus de trous que de balles, et que les marches aléatoires de noyau P sont irréductibles, les balles trouvent chacune un trou avec proba 1. □

Le lecteur pourra se référer à l'annexe [A](#), dans laquelle on donne une description en pseudo-code du processus d'affectation des balles dans les trous, avec la fonction `AlgoGolf`.

Quelques références : Les séquences de golf, en tant qu'objet combinatoire, (i.e. en tant que suite de chemins tels que le i ème part de S_i jusqu'à un sommet de T non déjà touché par un des $i-1$ chemins précédents), ont été récemment utilisées dans un article de Fredes et Marckert [\[FM21\]](#), comme outils pour une preuve combinatoire du théorème d'Aldous–Broder. Mais c'est en fait un modèle utilisant un paradigme plus ancien, dont les propriétés algébriques ont été mises à jour par Diaconis et Fulton, qui l'avaient décrit, en tant que modèle algébrique, mais aussi combinatoire et probabiliste, dans un article de 1991 [\[DF91\]](#) qui donnait notamment une preuve combinatoire de la formule d'inversion de Lagrange. Cet article a été le point de départ d'une large étude des processus appelés IDLA (pour *internal diffusion-limited aggregation*), qui consiste à construire récursivement un agrégat aléatoire de particules (sur \mathbb{Z}^d ou un graphe connexe plus général), où au début on considère un agrégat vide, et à chaque étape une nouvelle particule (une balle de golf) effectue une marche aléatoire partant de l'origine (un sommet s du graphe distingué), et s'arrête sur le premier sommet n'étant pas déjà dans l'agrégat (tous les sommets du graphe de départ sont considérés comme des trous). Il a notamment été démontré que sur \mathbb{Z}^d , la forme asymptotique de l'agrégat est la boule euclidienne [\[LBG92\]](#), et par la suite les déviations autour de cette forme limite ont pu être quantifiées, de plus en plus précisément, dans un ensemble d'articles dû notamment à Asselah et Gaudilliere d'une part, Jerison, Levine et Sheffield d'autre part (on pourra éventuellement se référer à [\[GA13\]](#) et [\[JLS11\]](#) pour les premiers résultats donnant des bornes logarithmiques pour les fluctuations).

Ce mémoire est composé comme suit :

Nous allons, dans la partie [2](#), étudier notre modèle sur un graphe fini. Nous verrons d'abord une propriété "de commutation", qui permet de s'affranchir des considérations sur l'ordre d'activation des

balles, puis nous nous intéresserons à la loi des trous libres dans le cas particulier du cercle $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, qui met en évidence des propriétés intéressantes sur la loi de $\mathbf{T}^{\mathbf{L}}$ (que l'on calculera dans la section 2.2).

Comme nous l'avons déjà mentionné, une extension naturelle de notre modèle est la définition et l'étude d'un modèle analogue sur des graphes infinis, mais il y a une réelle difficulté à définir correctement les modèles. Dans la section 3, nous définirons sur \mathbb{Z} un processus analogue au modèle de golf sur les graphes finis, en faisant notamment appel à des outils de théorie ergodique. Enfin, dans la partie 4, nous étudierons la loi de $\mathbf{T}^{\mathbf{L}}$ sur \mathbb{Z} , notamment, en utilisant des théorèmes limites probabilistes appliqués au modèle de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ traité dans la partie 2.

L'ensemble des résultats (lemmes, propositions et théorèmes de ce document) sont nouveaux, hormis un lemme auxiliaire (le lemme 13); les théorèmes 2 et 3 sont proches de résultats existants.

2 Le modèle de golf sur un graphe fini

2.1 Une propriété de commutation

Dans cette sous-partie, nous allons montrer que sur un graphe fini, l'ordre dans lequel les balles sont activées n'influe pas sur la distribution de la configuration finale : les balles "commutent". Cette propriété de commutation a en fait son équivalent dans le modèle IDLA, et on se sert de la preuve de Diaconis et Fulton [DF91] pour la montrer. On dit que $A = (A_v, v \in V) \in [0, 1]^V$ sont des temps d'activation valides, si les A_v sont différents 2 à 2 (ce qui arrive donc avec probabilité 1 sous le modèle Golf). On a alors le théorème suivant :

Théorème 2. *On se place dans le modèle Golf $[G, \mu_{init}, \mu_T, P]$, et soit $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_v, v \in V)$ les temps d'activation des sommets. La loi conditionnelle de $\mathbf{T}^{\mathbf{L}}$ sachant $\mathbf{A} = A$ est la même pour tout A valide; en d'autres termes, la loi des trous libres résiduels est indépendante de l'ordre de départ des balles :*

$\mathbf{T}^{\mathbf{L}} = \text{AlgoGolf}(G, \mathbf{B}^{init}, \mathbf{T}^{init}, \mathbf{A}, P)$ et $\text{AlgoGolf}(G, \mathbf{B}^{init}, \mathbf{T}^{init}, A, P)$ ont même loi.

Afin de démontrer ce résultat, on peut utiliser un procédé classique lorsque l'on travaille sur des marches aléatoires, qui consiste à travailler avec des piles de flèches pour introduire en quelque sorte du déterminisme. Ces piles de flèches permettent de décider avant le début du processus l'ensemble des trajectoires que suivront les balles : il s'agit donc d'une représentation alternative, du même processus (identique en loi). Entrons dans les détails :

Représentation alternative du golf aléatoire utilisant les piles d'arêtes. Au lieu de considérer des marches aléatoires de noyau P , on travaille avec des piles de flèches pondérées, de la façon suivante : sur chaque sommet $u \in V$, on met à disposition des balles une *pile d'arêtes* issues de u , $h_u \in \bigcup_{l \geq 0} O_u^l$, (où $O_u = \{(u, v) : (u, v) \in E\}$ est l'ensemble des arêtes partant de u). Rappelons que les balles partent successivement, et une balle effectuant toute sa marche avant que la balle suivante ne commence son périple. Lorsqu'une balle sur u a besoin de faire un pas, elle dépile la première arête de h_u , et l'emprunte (de la même manière qu'elle aurait emprunté l'arête tirée selon $P(u, \cdot)$ lors de la marche aléatoire). Ainsi, dans notre processus, une balle partant de S_i , au lieu de faire une marche aléatoire jusqu'à un élément de T^{init} non déjà atteint, dépile et emprunte des arêtes d'un ensemble $H = (h_u) \in \prod_{u \in V} \left(\bigcup_{l \geq 0} O_u^l \right)$ jusqu'à dépiler une arête de la forme (\cdot, t) , avec $t \in T$ non déjà touché. L'aléa n'est donc plus directement sur les marches aléatoires de noyau P , mais sur la collection de piles $H \in \prod_{u \in V} \left(\bigcup_{l \geq 0} O_u^l \right)$, que l'on pondère avec une fonction de poids définie sur l'ensemble $\underline{HeapCol} := \prod_{u \in V} \left(\bigcup_{l \geq 0} O_u^l \right)$:

$$\forall u \in V, W_u : h_u = [(u, v_i) : 1 \leq v_i \leq \ell] \mapsto \prod_{i=1}^{\ell} P(u, v_i),$$

$$\text{et } W : H = (h_u)_{u \in V} \mapsto \prod_{u \in V} W_u(h_u).$$

W est telle que, si H correspond à l'ensemble des arêtes (comptées avec leur multiplicité) de la trajectoire d'une balle sur G , alors $W(H)$ est exactement la probabilité qu'une balle effectuant une marche aléatoire sur G de noyau P suive cette trajectoire.

Considérons maintenant la variable aléatoire \mathcal{H} , ayant pour support l'ensemble des éléments de HeapCol qui correspondent exactement aux arêtes utilisées par les balles suivant notre processus de golf avec $B^{\text{init}}, T^{\text{init}}, A$ pour conditions initiales, et ayant pour densité W . La correspondance marche aléatoires–piles que nous venons de voir permet de définir un processus équivalent, que l'on peut appeler $\text{AlgoGolf}^{\text{piles}}$, tel que $\text{AlgoGolf}^{\text{piles}}(G, B^{\text{init}}, T^{\text{init}}, A, \mathcal{H})$ et $\text{AlgoGolf}(G, B^{\text{init}}, T^{\text{init}}, A, P)$ ont exactement la même loi. L'algorithme 2 en annexe donne le comportement de la fonction $\text{AlgoGolf}^{\text{piles}}$.

Pour prouver le théorème 2, il suffit donc de montrer le théorème suivant, plus fort, qui montre que la loi des trous résiduels, dans le nouveau modèle "à piles", ne dépend pas de l'ordre d'activation des balles.

Théorème 3. *Pour tous $G, B^{\text{init}}, T^{\text{init}}, A$ et H corrects (i.e. tels que $|B^{\text{init}}| \leq |T^{\text{init}}|, \forall u, v \in V, u \neq v : A_u \neq A_v$ et H appartient au support de \mathcal{H}). Alors, pour toute permutation σ sur V , $\text{AlgoGolf}^{\text{piles}}$ termine sur l'entrée $(G, B^{\text{init}}, T^{\text{init}}, A^\sigma, H)$, et*

$$\text{AlgoGolf}^{\text{piles}}(G, B^{\text{init}}, T^{\text{init}}, A, H) = \text{AlgoGolf}^{\text{piles}}(G, B^{\text{init}}, T^{\text{init}}, A^\sigma, H)$$

Preuve. L'argument clé de la preuve de Diaconis et Fulton [DF91, proposition 4.1] est le suivant : si on considère la pile d'arêtes H dans le cas A , elle vérifie cette égalité, pour tout $u \in V$:

$$\# \text{arêtes de } H \text{ entrantes sur } u + \mathbb{1}_{u \in B^{\text{init}}} = \# h_u + \mathbb{1}_{u \in T^{\text{init}}(A)}$$

Si dans le cas A^σ l'algorithme ne termine pas, cela signifie qu'une balle n'a pas pu dépiler une arête sur un certain sommet u , et donc qu'il y avait un excès d'arêtes entrantes par rapport à celles sortantes sur ce sommet, c'est à dire que $\# \text{arêtes entrantes sur } u + \mathbb{1}_{u \in B^{\text{init}}} > \# h_u + \mathbb{1}_{u \in T^{\text{init}}}$. C'est absurde puisque dans les cas A et A^σ , les conditions initiales sur $B^{\text{init}}, T^{\text{init}}$ et H sont les mêmes.

On en déduit non seulement que l'algorithme termine également dans le cas A^σ , mais qu'en plus pour tout $u \in V, \mathbb{1}_{u \in T^{\text{init}}(A)} = \mathbb{1}_{u \in T^{\text{init}}(A^\sigma)}$. Nous avons donc prouvé le théorème 3. \square

Conclusion : La loi μ^T ne joue donc aucun rôle sur un graphe fini (ce qui était facile à voir, d'ailleurs, puisque pour toute loi μ^T , l'ordre de départ des balles forme une permutation aléatoire uniforme). Ce qu'on sait de plus maintenant, c'est que tout ordre fixé de départ des balles donne la même loi pour les trous résiduels. On pourra donc choisir S_1, \dots, S_{N_b} selon un ordre arbitraire sur B^{init} , et dans la suite de cette partie on ne spécifiera plus le choix de la suite S_1, \dots, S_{N_b} .

Par ailleurs, on pourrait utiliser la propriété de Diaconis-Fulton pour permettre à plusieurs balles d'effectuer leur parcours en même temps, et la loi des trous résiduels n'en serait pas affectée.

2.2 Analyse sur le cercle $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Nous passons à l'étude du cas particulier $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, graphe sur lequel nous allons calculer exactement la loi des trous résiduels (résultat nouveau). Nous verrons que celle-ci s'exprime finalement plutôt simplement en fonction uniquement des distances entre les trous, et donc on se servira de notre formule pour exprimer la loi des distances entre trous consécutifs, et l'exploiter dans un cas intéressant, où on fixe le nombre de balles et de trous, et où l'on fait grandir la taille du cercle $n \rightarrow \infty$.

Le modèle sur le cercle : Soit $n \in \mathbb{N}$, et soient $N_b, N_t \in \mathbb{N}$ tels que $N_b + N_t \leq n$. On travaille sur le cercle de taille $n, \mathcal{C}_n := (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \{\{i, i+1 \pmod n\}, i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\})$.

On note C^{n, N_b, N_t} l'ensemble des configurations initiales possibles sur \mathcal{C}_n avec N_b balles et N_t trous :

$$C^{n, N_b, N_t} = \left\{ X \in \{\mathbf{b}, \mathbf{t}_L, \mathbf{n}\}^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} : |\{v : C_v = \mathbf{b}\}| = N_b \text{ et } |\{v : C_v = \mathbf{t}_L\}| = N_t \right\}.$$

On sait que $|C^{n, N_b, N_t}| = \binom{n}{N_b, N_t, n - N_b - N_t} = \frac{n!}{N_b! N_t! (n - N_b - N_t)!}$ (c'est une simple multinomiale).

Configuration initiale : on prends ici la configuration initiale selon $\mu_{\text{init}} = \mathcal{U}(C^{n, N_b, N_t})$, et on choisit $\mu_T = \mathcal{U}([0, 1])$ ce qui, on l'a déjà dit, donne la même loi résiduelle que tout autre choix. Pour le noyau des marches aléatoires, on définit ensuite P : pour tout $i, j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$,

$$P(i, j) = \begin{cases} p & \text{si } j = i + 1 \\ 1 - p & \text{si } j = i - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On note alors $\text{GolfCercle}[n, N_b, N_t, p] := \text{Golf}[\mathcal{C}_n, \mathcal{U}(C^{n, N_b, N_t}), \mu_T, P]$ le modèle de golf ainsi défini.

Afin de simplifier les notations, on note $\mathbb{P}^{n, N_b, N_t, p}(\cdot)$ pour la loi du modèle $\text{GolfCercle}[n, N_b, N_t, p]$. On pose par ailleurs $N_\ell := N_t - N_b$.

2.2.1 Loi des trous résiduels

Nous allons montrer que dans le modèle $\text{GolfCercle}[n, N_b, N_t, p]$, on sait calculer la loi de \mathbf{T}^L . L'une de ses propriétés notables, c'est qu'elle ne dépend pas du paramètre p des marches aléatoires. On commence dans un cas simple, où il ne reste qu'un trou libre à la fin du processus, et ensuite on généralise avec le théorème 5.

Lemme 4. (Loi des trous résiduels - cas $N_t = N_b + 1$.) *Supposons que $2N_b + 1 \leq n$. Pour tout $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$,*

$$\mathbb{P}^{n, N_b, N_b+1, p}(\mathbf{T}^L = \{x\}) = \frac{1}{n} \quad (1)$$

et

$$\mathbb{P}^{n, N_b, N_b+1, p}(\mathbf{T}^L = \{x\} \mid x \in \mathbf{T}^{\text{init}}) = \frac{1}{N_b + 1} \quad (2)$$

Preuve. 1 est immédiate puisque μ_{init} et P sont invariantes par rotation, donc on en déduit directement que la loi de \mathbf{T}^L est également invariante par rotation. 2 est un corollaire immédiat de 1. \square

Théorème 5. (Loi des trous résiduels.) *Soient x_1, \dots, x_{N_ℓ} des éléments de $\{0, \dots, n-1\}$ tels que $x_1 < \dots < x_{N_\ell}$; vus comme éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, ils apparaissent consécutivement lorsqu'on tourne autour du cercle. Alors, en considérant $X = \{x_1, \dots, x_{N_\ell}\} \subseteq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et en notant, pour tout i , $\ell_i := (x_{i+1} - x_i - 1) \bmod n$ (c'est le nombre d'emplacements libres entre le i ème trou et le $i+1$ ème), on a :*

$$\mathbb{P}^{n, N_b, N_t, p}(\mathbf{T}^L = X) = \frac{1}{|C^{n, N_b, N_t}|} \sum_{\sum_i b_i = N_b, \text{ et } \forall i, b_i: 2b_i \leq \ell_i} \prod_{i=1}^m \frac{1}{b_i + 1} \binom{\ell_i}{b_i, b_i, \ell_i - 2b_i}$$

Esquisse de la preuve : tout d'abord, l'ensemble X est l'ensemble des trous résiduels si et seulement si X a le bon cardinal, et aucune trajectoire de balles ne touche X . Ainsi, à un ensemble de trous X fixé, la probabilité recherchée peut-être calculée en sommant sur l'ensemble des configurations initiales compatibles (i.e. telles qu'il y a des trous sur X , et qu'il y a bien autant de balles que de trous entre deux éléments de X consécutifs, afin que chaque balle puisse trouver un trou), et ensuite sur toutes les trajectoires des balles qui conviennent (c'est à dire qui ne passent pas sur un sommet de X). On peut alors traiter indépendamment ce qui se passe dans chaque intervalle entre deux trous et calculer la probabilité qu'aucune balle ne sorte d'un de ces intervalles.

Avant de prouver formellement le théorème 5, nous allons introduire un nouveau point de vue central dans la preuve, celui des *histoires*, qui sont justement les trajectoires des balles sur lesquelles on va travailler.

Les histoires : On définit une histoire comme l'ensemble des trajectoires suivies par chaque balle. Ainsi, la trajectoire de la i ème balle à partir est de la forme : $(u_j^{(i)}, 0 \leq j \leq L_i)$ avec $u_0^{(i)} = S_i$ (la balle part de S_i), $\forall k < L_i, u_k^{(i)} \notin T^{\text{init}} \setminus \{u_{L_j}^{(j)}, j < i\}$ et $u_{L_i}^{(i)} \in T^{\text{init}} \setminus \{u_{L_j}^{(j)}, j < i\}$ (on s'arrête sur le premier sommet étant un trou non déjà touché par une des balles précédentes).

Formellement, si $C^{\text{init}} = (B^{\text{init}}, T^{\text{init}})$ est telle que $|B^{\text{init}}| = N_b$ et (S_1, \dots, S_{N_b}) est un ordonnancement quelconque des sommets de B^{init} , alors

$$\begin{aligned} \underline{\text{Histoires}}^{(n)}(C^{\text{init}}) := & \left\{ \left(\left(u_j^{(i)} \right)_{0 \leq j \leq L_i} \right)_{1 \leq i \leq N_b} : \forall i, u_0^{(i)} = S_i, u_{L_i}^{(i)} \in T^{\text{init}} \setminus \{u_{L_j}^{(j)}, j < i\}, \right. \\ & \left. \text{et } \forall k < L_i, u_k^{(i)} \notin T^{\text{init}} \setminus \{u_{L_j}^{(j)}, j < i\} \right\} \end{aligned}$$

Le poids d'une histoire $h = \left(\left(u_j^{(i)} \right)_{0 \leq j \leq L_i} \right)_{1 \leq i \leq N_b} \in \underline{Histoires}^{(n)}(C^{init})$ est la probabilité que pour tout i , la balle partant de S_i suive la trajectoire $w_i = \left(u_j^{(i)} \right)_{0 \leq j \leq L_i}$, et vaut donc

$$W(h) := \prod_{i=1}^{N_b} \prod_{j=0}^{L_i-1} P \left(u_j^{(i)}, u_{j+1}^{(i)} \right).$$

Par irréductibilité, puisque chaque balle trouve un trou avec probabilité 1, la somme des poids des histoires, qui correspond à la somme des probas des trajectoires de chaque balle, fait 1.

Par ailleurs, pour une histoire $h \in \underline{Histoires}^{(n)}(C^{init})$, on note $T^O(h) := \{u_{L_i}^{(i)}\}_{1 \leq i \leq N_b}$ l'ensemble des trous d'arrivée des balles, et $T^L(h) := T^{init} \setminus T^O(h)$. On définit finalement $\underline{Histoires}^{(n)}(C^{init}, T)$ comme l'ensemble des histoires de $\underline{Histoires}^{(n)}(C^{init})$ qui terminent en laissant T libre :

$$\underline{Histoires}^{(n)}(C^{init}, T) := \left\{ h \in \underline{Histoires}^{(n)}(C^{init}) : T^L(h) = T \right\}.$$

On définit enfin A_C l'événement correspondant au fait que la configuration initiale $C = (B_C, T_C)$ est compatible avec l'événement $\mathbf{T}^L = X$:

$$A_C = X \subseteq T_C \cap \forall i, |B_C \cap I_i| = |T_C \cap I_i|,$$

que l'on peut décomposer en l'union disjointe des événements $A_{C, (b_i)_i} := X \subseteq T_C \cap \forall i, |B_C \cap I_i| = b_i$, pour toute famille $(b_i)_i$ telle que $\forall i, b_i \leq \ell_i/2$.

Les histoires laissant les trous de X libres sont des produits d'histoires sur de plus petits cercles laissant, chacune, 0 libre : On peut maintenant énoncer le lemme suivant, qui permet de décomposer une histoire laissant finalement les trous de X libres en produit des histoires entre chaque paire de trous de X consécutifs, chaque histoire entre deux trous séparés de l sommets correspondant à une histoire sur le cercle de taille l laissant 0 libre à la fin. La figure 1 illustre cette décomposition.

Lemme 6 (de décomposition des histoires). *Soit $C \in C^{n, N_b, N_t}$ une configuration initiale telle que A_C est vraie. On définit, pour tout i , C_i telle que $B_{C_i} = \{x - x_i | x \in B \cap I_i\}$ et $T_{C_i} = \{x - x_i | x \in T \cap I_i\}$. Cela définit une bijection*

$$\left\{ \begin{array}{l} C \in C^{n, N_b, N_t} \\ C \end{array} \middle| A_{C, (b_j)_j} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow \prod_{k=1}^{N_\ell} \{C_k \in C^{\ell_k, b_k, b_k+1} : 0 \in T_{C_k}\} \\ \mapsto (C_1, \dots, C_{N_\ell}) \end{array}$$

Alors, il existe une bijection

$$f : \begin{array}{l} \underline{Histoires}^{(n)}(C, X) \\ h \end{array} \begin{array}{l} \rightarrow \prod_{i=1}^{N_\ell} \underline{Histoires}^{(\ell_i+1)}(C_i, \{0\}) \\ \mapsto (h_1, \dots, h_{N_\ell}) \end{array}$$

telle que, pour tout $h \in \underline{Histoires}^{(n)}(C, X)$, si $f(h) = (h_1, \dots, h_{N_\ell})$, alors $W(h) = \prod_{i=1}^{N_\ell} W(h_i)$.

Preuve du lemme 6. La preuve repose sur le fait que, conditionnellement aux trous libres finaux, la trajectoire de chaque balle n'intersecte pas ces trous libres, et reste donc dans l'intervalle entre les deux trous libres finaux consécutifs dont elle est issue.

Plus formellement : les C_i définis dans le lemme donnent explicitement la première bijection. Pour la seconde bijection, on définit, pour toute $h \in \underline{Histoires}^{(n)}(C, X)$ et tout $k \in \llbracket 1, N_\ell \rrbracket$, $h_i := \left(\left(u_j^{(i)} - x_i \right)_{0 \leq j \leq L_i} \right)_{1 \leq i \leq N_b : u_0^{(i)} \in I_k}$.

On peut alors vérifier aisément que $(h_1, \dots, h_{N_\ell}) \in \prod_{i=1}^{N_\ell} \underline{Histoires}^{(\ell_i+1)}(C_i, \{0\})$ (un point à noter est que l'ordre des sommets de B_{C_i} est celui induit par l'ordre sur B_C , donc les trajectoires terminent bien sur le premier trou encore libre).

Par ailleurs, cette bijection conserve bien les poids des trajectoires, puisque le noyau des marches aléatoires est invariant par rotation, et donc :

$$\begin{aligned}
W(h) &= \prod_{i=1}^{N_b} \prod_{j=0}^{L_i-1} P(u_j^{(i)}, u_{j+1}^{(i)}) = \prod_{k=1}^{N_\ell} \prod_{i: u_0^{(i)} \in I_k} \prod_{j=0}^{L_i-1} P(u_j^{(i)}, u_{j+1}^{(i)}) \\
&= \prod_{k=1}^{N_\ell} \prod_{i: u_0^{(i)} \in I_k} \prod_{j=0}^{L_i-1} P(u_j^{(i)} - x_k, u_{j+1}^{(i)} - x_k) = \prod_{k=1}^{N_\ell} W(h_k).
\end{aligned}$$

□

On a maintenant tous les outils pour prouver le théorème 5.

Preuve du théorème 5. La probabilité de l'évènement $\mathbf{T}^{\mathbf{L}} = X$, c'est le poids des configurations qui vérifient $\mathbf{T}^{\mathbf{L}} = X$. Le calcul complet, détaillé ci-dessous, consiste donc à sommer correctement sur toutes les configurations telles que les conditions initiales sur C sont compatibles avec l'évènement $\mathbf{T}^{\mathbf{L}} = X$ (via les $A_{C, (b_i)_i}$ définis plus haut, ce qui correspond à l'égalité (4)), et ensuite, à une configuration initiale C fixée (équation (7)), à sommer les poids de toutes les histoires compatibles à la fois avec C et avec $\mathbf{T}^{\mathbf{L}} = X$, c'est à dire les histoires de $\underline{Histoires}^{(n)}(C, X)$ (pour obtenir l'équation (8)). On peut alors utiliser le lemme 6 pour décomposer en histoires sur le cercle avec un seul trou libre à la fin, pour ainsi obtenir l'égalité (11). Alors, on utilise le lemme 4 pour conclure (égalité (13)), puis conclusion finale avec l'équation (14).

On commence par écrire :

$$\mathbb{P}^{n, N_b, N_t, p}(\mathbf{T}^{\mathbf{L}} = X) = \mathbb{P}^{n, N_b, N_t, p}(\{\mathbf{T}^{\mathbf{L}} = X\} \cap A_{\mathbf{C}}) \quad (3)$$

$$= \sum_{\sum_i b_i = N_b, \text{ et } \forall i, b_i : 2b_i \leq \ell_i} \mathbb{P}^{n, N_b, N_t, p}(\{\mathbf{T}^{\mathbf{L}} = X\} \cap A_{C, (b_j)_j}) \quad (4)$$

On peut ensuite détailler :

$$\mathbb{P}^{n, N_b, N_t, p}(\{\mathbf{T}^{\mathbf{L}} = X\} \cap A_{C, (b_j)_j}) \quad (5)$$

$$= \sum_{C: A_{C, (b_j)_j}} \mathbb{P}^{n, N_b, N_t, p}(\{\mathbf{T}^{\mathbf{L}} = X\} \cap C = C) \quad (6)$$

$$= \frac{1}{|C^{n, N_b, N_t}|} \sum_{C: A_{C, (b_j)_j}} \mathbb{P}^{n, N_b, N_t, p}(\{\mathbf{T}^{\mathbf{L}} = X\} | C = C) \quad (7)$$

$$= \frac{1}{|C^{n, N_b, N_t}|} \sum_{C: A_{C, (b_j)_j}} \sum_{h \in \underline{Histoires}^{(n)}(C, X)} W(h) \quad (8)$$

$$\stackrel{\text{(lemme 6)}}{=} \frac{1}{|C^{n, N_b, N_t}|} \sum_{\substack{C_k \in C_{\ell_k, b_k, b_k+1}: \\ 0 \in T_{C_k}}} \sum_{h_1, \dots, h_{N_\ell} \in \prod_{i=1}^{N_\ell} \underline{Histoires}^{(\ell_i+1)}(C_i, \{0\})} \prod_{k=1}^{N_\ell} W(h_k) \quad (9)$$

$$= \frac{1}{|C^{n, N_b, N_t}|} \prod_{k=1}^{N_\ell} \sum_{\substack{C_k \in C_{\ell_k, b_k, b_k+1}: \\ 0 \in T_{C_k}}} \sum_{h_1, \dots, h_{N_\ell} \in \prod_{i=1}^{N_\ell} \underline{Histoires}^{(\ell_i+1)}(C_i, \{0\})} W(h_k) \quad (10)$$

$$= \frac{1}{|C^{n, N_b, N_t}|} \prod_{k=1}^{N_\ell} \sum_{\substack{C_k \in C_{\ell_k, b_k, b_k+1}: \\ 0 \in T_{C_k}}} \mathbb{P}^{\ell_k+1, b_k, b_k+1, p}(\{\mathbf{T}^{\mathbf{L}} = \{0\}\} | C = C_k) \mathbf{1} \quad (11)$$

$$= \frac{1}{|C^{n, N_b, N_t}|} \prod_{k=1}^{N_\ell} \binom{\ell_k}{b_k, b_k, \ell_k - 2b_k} \mathbb{P}^{\ell_k+1, b_k, b_k+1, p}(\{\mathbf{T}^{\mathbf{L}} = \{0\}\} | 0 \in T_{C_k}) \quad (12)$$

$$\stackrel{\text{(lemme 4)}}{=} \frac{1}{|C^{n, N_b, N_t}|} \prod_{k=1}^{N_\ell} \frac{1}{b_k + 1} \binom{\ell_k}{b_k, b_k, \ell_k - 2b_k} \quad (13)$$

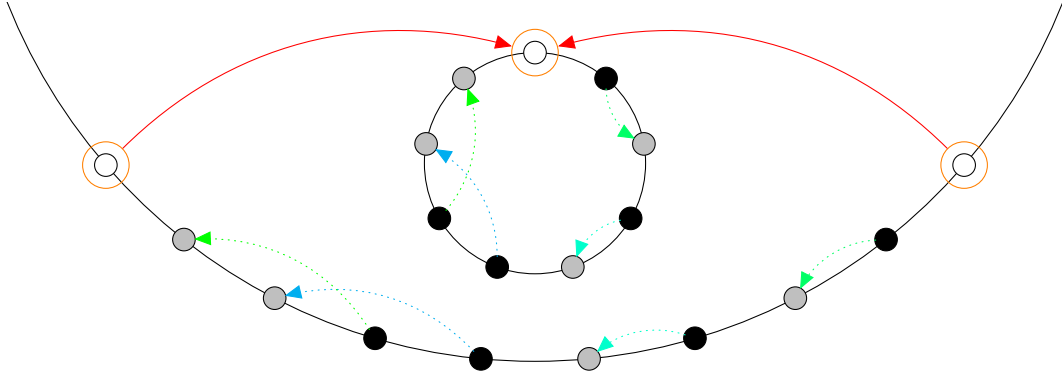


FIGURE 1 – Illustration de la décomposition des histoires : ce qui se passe sur le grand cercle entre les deux trous oranges, séparés de $\ell = 8$ sommets, est en bijection avec ce qui se passe sur un petit cercle de taille $\ell + 1 = 9$.

Sur les images, un sommet noir correspond à la position initiale d'une balle, un sommet blanc à un trou libre, et un sommet gris à un trou occupé par une balle. Une flèche en pointillé associe une balle au trou dans lequel elle est tombée.

On peut finalement conclure :

$$\mathbb{P}^{n, N_b, N_t, p}(\mathbf{T}^{\mathbf{L}} = X) = \frac{1}{|C^{n, N_b, N_t}|} \sum_{\sum_i b_i = N_b, \text{ et } \forall i, b_i: 2b_i \leq \ell_i} \prod_{k=1}^{N_\ell} \frac{1}{b_k + 1} \binom{\ell_k}{b_k, b_k, \ell_k - 2b_k}. \quad (14)$$

□

2.2.2 Loi des tailles inter-blocs

Lors de l'analyse de la loi de $\mathbf{T}^{\mathbf{L}}$ sur le cercle $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on a vu apparaître une décomposition des configurations en blocs : des trous libres séparant des intervalles avec autant de balles que de trous, tous les trous étant occupés à la fin. Le théorème 5 montre ainsi que la loi des trous libres sur le cercle dépend uniquement des distances entre ces trous. On peut donc choisir de considérer uniquement les tailles des blocs, c'est à dire la suite des distances entre deux trous libres (deux éléments de $\mathbf{T}^{\mathbf{L}}$) consécutifs. On utilisera plutôt ce point de vue dans la suite. On va donc définir formellement les distances entre deux trous consécutifs, et réexprimer le théorème 5 en terme de distances inter-trous. On ne numérottera pas les blocs de 0 à $N_\ell - 1$, mais de $-\lfloor \frac{N_\ell}{2} \rfloor + 1$ à $\lfloor \frac{N_\ell}{2} \rfloor$, afin d'avoir des blocs centrés autour de 0. Ce sera pertinent dans la suite du rapport, lorsqu'on cherchera à quantifier la loi des trous sur \mathbb{Z} , et qu'on calculera la loi des blocs autour de 0.

Définition (Notation Δ_i et I_ℓ). Soit $X \subseteq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ de taille $\ell = |X|$. On définit $I_\ell := [-\lfloor \frac{\ell}{2} \rfloor + 1, \lfloor \frac{\ell}{2} \rfloor]$ (cela correspond à un intervalle d'entiers de taille ℓ centré autour de 0). Soit $(x_i)_{I_\ell}$ l'unique suite des éléments de X telle que, vus comme des éléments de $\{0, \dots, n-1\}$, $0 \leq x_1 < \dots < x_{\lfloor \frac{\ell}{2} \rfloor} < x_{-\lfloor \frac{\ell}{2} \rfloor + 1} < \dots < x_0$. Comme dans l'énoncé du théorème 5, on considère les éléments de X qui apparaissent consécutivement lorsqu'on tourne autour du cercle, indicés de sorte que 0 apparaisse entre x_0 et x_1 .

On peut alors poser $x_{\lfloor \frac{\ell}{2} \rfloor + 1} := x_{-\lfloor \frac{\ell}{2} \rfloor + 1}$, et définir la famille $(\Delta_i X)_{i \in I_\ell}$ de la façon suivante :

$$\forall i \in I_\ell, \Delta_i X := (x_{i+1} - x_i - 1) \bmod n.$$

Les $(\Delta_i X)$ constituent ainsi la suite des tailles des blocs entre deux trous consécutifs ; le bloc qui contient 0, ou qui est à gauche de 0 si 0 est un trou, est de taille Δ_0 .

La figure 2 illustre cette définition.

On peut énoncer un premier théorème limite concernant la taille des blocs :

1. Si $A, B, (B_i)_i$ sont des événements tels que $B = \sqcup_{i=1}^K B_i$ et $\forall i, j, \mathbb{P}(B_i) = \mathbb{P}(B_j)$, alors $\sum \mathbb{P}(A|B_i) = \frac{1}{\mathbb{P}(B_1)} \sum \mathbb{P}(A \cap B_i) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B_1)} = K\mathbb{P}(A|B)$

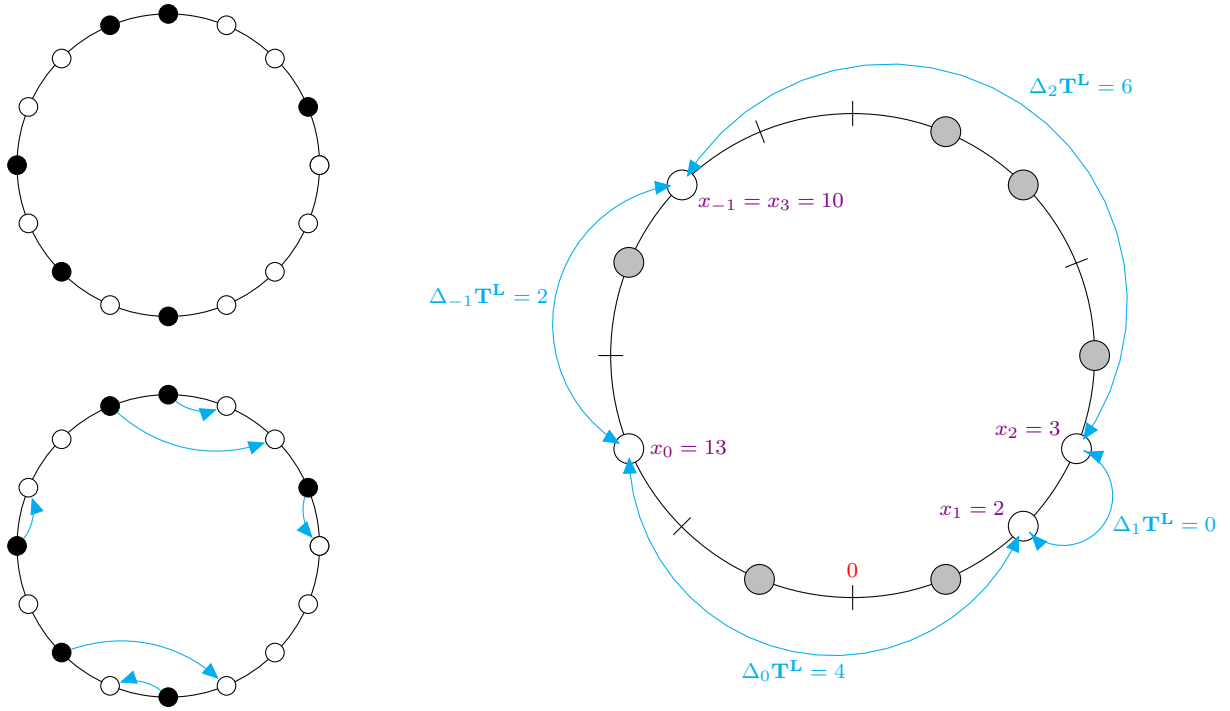


FIGURE 2 – Le premier petit dessin représente une configuration initiale à $N_b = 6$ balles, $N_t = 10$ trous libres, avec de nouveau la convention qu’une balle est représentée par un disque noir (\bullet) tandis qu’un trou libre est représenté par un disque blanc (\circ). Sur la deuxième image, on a choisi un ordre pour les balles et on montre le trou dans lequel elles vont finalement tomber. Enfin, l’image de droite représente une configuration finale, un disque blanc correspondant toujours à un trou libre, un disque gris étant cette fois un trou occupé. Une graduation représente simplement un emplacement sans rien. ici : $N_\ell = 4$. Sur la configuration finale, $T^L = \{2, 3, 10, 13\}$, et donc $\Delta_{-1}T^L = 2$, $\Delta_0T^L = 4$, $\Delta_1T^L = 0$ et $\Delta_2T^L = 6$.

Proposition 7. (*Loi des tailles des blocs.*) On rappelle que $N_\ell = N_t - N_b$ est le nombre de trous finalement libres. Soit $(\ell_i)_{i \in I_{N_\ell}}$ une suite telle que $\sum_{i \in I_{N_\ell}} \ell_i = n - N_\ell$. Alors, la loi des distances inter-trous libres est donnée par :

$$\mathbb{P}^{n, N_b, N_t, p} (\forall i \in I_{N_\ell}, \Delta_i \mathbf{T}^L = \ell_i) = \frac{\ell_0 + 1}{|C^{n, N_b, N_t}|} \sum \prod_{i \in I_{N_\ell}} \frac{1}{b_i + 1} \binom{\ell_i}{b_i, b_i, \ell_i - 2b_i}.$$

où la somme porte sur les N_ℓ uplets $(b_i)_{i \in I_{N_\ell}}$ satisfaisant $\sum_{i \in I_{N_\ell}} b_i = N_b$, et $\forall i, 2b_i \leq \ell_i$.

Preuve. Soit $(\ell_i)_{i \in I_{N_\ell}}$ une suite telle que $\sum_{i \in I_{N_\ell}} \ell_i = n - N_\ell$. L’ensemble des X tels que $\forall i, \Delta_i X = \ell_i$ est de taille $\ell_0 + 1$, et donc le résultat est un corollaire immédiat du théorème 5. \square

2.2.3 Limite asymptotique à nombres de balles et de trous fixés

L’objectif dans cette partie est de montrer que, à N_b et N_t fixés, le vecteur $\left(\frac{\Delta_i \mathbf{T}^L}{n}, 1 \leq i \leq N_\ell\right)$ converge en loi quand la taille du cercle $n \rightarrow \infty$.

Théorème 8. Soient N_b et N_t tels que $N_b < N_t$.

Soit $\Delta \mathbf{T}^L(n) = \left(\frac{\Delta_i \mathbf{T}^L(n)}{n}, 1 \leq i \leq N_\ell\right)$ le vecteur des distances inter-trous dans le modèle sur le cercle $\text{GolfCercle}[n, N_b, N_t, p]$.

On a la convergence en loi, $\frac{\Delta \mathbf{T}^L(n)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \Delta \mathbf{T}$, où $\Delta \mathbf{T}$ est une variable aléatoire sur le simplexe $\left\{x = (x_i)_{i \in I_{N_\ell}} : \sum x_i = 1\right\}$, de densité

$$f(x) := x_0 N_b! N_t! \sum_{(b_i) : \sum_i b_i = N_b} \prod_{k \in I_{N_\ell}} \frac{1}{b_k! (b_k + 1)!} x_k^{2b_k}.$$

Remarque. La loi de Dirichlet de paramètres $K \geq 2$ et $\alpha = (\alpha_i)_{1 \leq i \leq K}$ est la loi sur le simplexe $\{x_1, \dots, x_K : \sum x_i = 1\}$ de densité $\frac{1}{\mathbb{B}(\alpha)} \prod_{i=1}^K x_i^{\alpha_i-1}$ (cette loi généralise la famille des lois $\beta(a, b)$, où $\beta(a, b)$ est la loi de densité $c_{a,b} x^{a-1} (1-x)^{b-1}$ sur $[0,1]$). Ainsi notre théorème énonce la convergence de $\frac{\Delta_{\mathbf{T}^{\mathbf{L}}(n)}}{n}$ vers un mélange de Dirichlet.

Preuve. Le lemme de Scheffé énonce que, si une suite de mesures de proba P_n possède une densité f_n , alors si $f_n \rightarrow f$ simplement et que $\int f(x) dx = 1$ alors (P_n) converge en loi vers la loi P de densité f (ce n'est pas évident, car la convergence en loi correspond à la convergence de la fonction de répartition presque partout). On peut aussi utiliser le théorème de Scheffé pour des variables discrètes, disons entière : si $a_n \mathbb{P}(X_n = [a_n x]) \rightarrow f(x)$ pour tout x , où $a_n \rightarrow +\infty$ et f est une densité de proba, alors X_n/a_n converge en loi vers la loi de densité f . On va utiliser une version multidimensionnelle, dont la condition d'utilisation est $a_n^d \mathbb{P}((X_n^{(i)} = [a_n x_i], 1 \leq i \leq d) \rightarrow f(x_1, \dots, x_d)$ simplement et f densité.

Notons $c := |C^{n, N_b, N_t}|$. Soient $x_i > 0, i \in I_{N_\ell} \setminus \{0\}$ tels que $\sum_{i \in I_{N_\ell} \setminus \{0\}} x_i < 1$. Pour tout $k \in I_{N_\ell}$, on note $\ell_k := \lfloor x_k(n - N_\ell) \rfloor$, et on note enfin $\ell_0 := n - N_\ell - \sum_{i \in I_{N_\ell} \setminus \{0\}} \ell_i$ et $x_0 := 1 - \sum_{i \in I_{N_\ell} \setminus \{0\}} x_i$.

$$n^{N_\ell-1} \mathbb{P}^{n, N_b, N_t, p} (\Delta_i \mathbf{T}^{\mathbf{L}} = \ell_i, \forall i \in I_{N_\ell}) \quad (15)$$

$$= \frac{n^{N_\ell-1} (\ell_0 + 1)}{c} \sum_{\substack{(b_i): \sum_i b_i = N_b \\ \text{et } \forall i, 2b_i \leq \ell_i}} \prod_{k \in I_{N_\ell}} \frac{1}{b_k + 1} \binom{\ell_k}{b_k, b_k, \ell_k - 2b_k} \quad (16)$$

$$\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n^{N_t - N_b} x_0 N_b! N_t!}{n^{N_b + N_t}} \sum_{(b_i): \sum_i b_i = N_b} \prod_{k \in I_{N_\ell}} \frac{1}{b_k! (b_k + 1)!} \frac{\ell_k!}{(\ell_k - 2b_k)!} \quad (17)$$

$$\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n^{-2N_b} x_0 N_b! N_t! \sum_{(b_i): \sum_i b_i = N_b} \prod_{k \in I_{N_\ell}} \frac{1}{b_k! (b_k + 1)!} (x_k n)^{2b_k} \quad (18)$$

$$\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} x_0 N_b! N_t! \sum_{(b_i): \sum_i b_i = N_b} \prod_{k \in I_{N_\ell}} \frac{1}{b_k! (b_k + 1)!} x_k^{2b_k} \quad (19)$$

Posons, pour tout $x = (x_i, i \in I_{N_\ell} \setminus \{0\})$ tel que $\forall i, x_i > 0$ et $\sum_{i \in I_{N_\ell} \setminus \{0\}} x_i < 1$, et pour tout n :

$$f_n(x) := n^{N_\ell-1} \mathbb{P}^{n, N_b, N_t, p} (\Delta_i \mathbf{T}^{\mathbf{L}} = \ell_i, \forall i \in I_{N_\ell}),$$

et

$$f(x) := x_0 N_b! N_t! \sum_{(b_i): \sum_i b_i = N_b} \prod_{k \in I_{N_\ell}} \frac{1}{b_k! (b_k + 1)!} x_k^{2b_k}$$

(où $x_0 = 1 - \sum_{i \in I_{N_\ell} \setminus \{0\}} x_i$).

De plus, pour simplifier la suite du raisonnement on pose, pour tout x tel que $\sum_{i \in I_{N_\ell} \setminus \{0\}} x_i \geq 1$, $f(x) := 0$.

Pour pouvoir appliquer le lemme de Scheffé, on souhaite montrer que f est bien une densité, c'est à dire que

$$\int_{\substack{(x_i)_{i \in I_{N_\ell} \setminus \{0\}}, \\ \sum x_i < 1}} f(x) dx = 1.$$

Une première solution aurait été de calculer directement cette intégrale, ce qui donne :

$$\int_{\substack{(x_i)_{i \in I_{N_\ell}}, \\ \sum x_i = 1}} x_0 N_b! N_t! \sum_{(b_i): \sum_i b_i = N_b} \prod_{k \in I_{N_\ell}} \frac{1}{b_k! (b_k + 1)!} x_k^{2b_k} dx_i \quad (20)$$

$$= \frac{N_b! N_t!}{(N_t + N_b)!} \sum_{\sum_i b_i = N_b} (2b_0 + 1) C_{b_0} \prod_{k \in I_{N_\ell} \setminus \{0\}} C_{b_k} \quad (21)$$

où, pour tout k , $C_k = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}$ est le k -ième nombre de Catalan. Un intérêt de cette méthode est qu'elle peut donner ensuite une interprétation combinatoire de l'intégrale que l'on cherche à calculer, puisque

$\sum_{\sum_i b_i = N_b} (2b_0 + 1) C_{b_0} \prod_{k \in I_{N_\ell} \setminus \{0\}} C_{b_k}$ c'est le nombre de forêts à N_ℓ arbres et N_b arêtes, avec un certain poids sur l'arbre indexé par 0. D'une manière générale, on sait qu'il y a exactement $F_{n,p} = \frac{p}{2n+p} \binom{2n+p}{n}$ forêts à p arbres et n arêtes [Bet14, page 6], mais le poids $(2b_0 + 1)$ empêche l'application directe de cette formule. On propose donc une approche plus analytique, utilisant un théorème de convergence dominée.

Tout d'abord, on sait que (f_n) converge simplement vers f sur $\mathbb{R}^{N_\ell - 1}$. Par ailleurs, les mêmes calculs que ceux pour obtenir (19) à partir de (15) donnent :

$$f_n(x) \leq \frac{n^{N_t - N_b - 1} (nx_0 + 2) N_b! N_t!}{(n - N_b - N_t)^{N_b + N_t}} \sum_{(b_i): \sum_i b_i = N_b} \prod_{k \in I_{N_\ell}} \frac{(nx_k + 1)^{2b_k}}{b_k! (b_k + 1)!}.$$

Posons, pour tout n ,

$$P_n(x) := \frac{n^{N_t - N_b - 1} (nx_0 + 2) N_b! N_t!}{(n - N_b - N_t)^{N_b + N_t}} \sum_{(b_i): \sum_i b_i = N_b} \prod_{k \in I_{N_\ell}} \frac{(nx_k + 1)^{2b_k}}{b_k! (b_k + 1)!}.$$

$P_n(x)$ est un polynôme en x , de degré maximum $2N_b + 1$, et on peut donc écrire

$$P_n(x) = \sum_{\alpha \in A} x^\alpha F_\alpha(n)$$

où A est un sous ensemble fini de $\{0, 1, \dots, 2N_b + 1\}_l^N$, et toutes les F_α sont des fractions rationnelles ayant une limite en $+\infty$ (on peut utiliser de nouveau les calculs de (15) à (19), $P_n(x)$ tend vers un polynôme en x donc chacun de ses coefficients converge). Ainsi, pour tout α , $\sup_{n \geq 0} |F_\alpha(n)|$ existe et est fini. On en déduit, en posant $g(x) := \sum_{\alpha \in A} x^\alpha \sup_{n \geq 0} |F_\alpha(n)|$, que f_n est dominée par g :

$$f_n(x) \leq \frac{n^{N_t - N_b - 1} (nx_0 + 2) N_b! N_t!}{(n - N_b - N_t)^{N_b + N_t}} \sum_{(b_i): \sum_i b_i = N_b} \prod_{k \in I_{N_\ell}} \frac{(nx_k + 1)^{2b_k}}{b_k! (b_k + 1)!} \quad (22)$$

$$= \sum_{\alpha \in A} x^\alpha F_\alpha(n) \quad (23)$$

$$\leq \sum_{\alpha \in A} x^\alpha \sup_{n \geq 0} |F_\alpha(n)| =: g(x) \quad (24)$$

Posons $x_i > 0$ tels que $\sum_{i \in I_{N_\ell} \setminus \{0\}} x_i \leq N_\ell$

g est un polynôme, on peut donc l'intégrer sur le support des f_n , qui est compact (c'est l'ensemble des $x_i > 0$ tels que $\sum_{i \in I_{N_\ell} \setminus \{0\}} \lfloor x_i(n - N_\ell) \rfloor \geq n - N_\ell$, inclus dans l'ensemble des $x_i > 0$ tels que $\sum_{i \in I_{N_\ell} \setminus \{0\}} x_i \leq N_\ell$).

On peut alors appliquer le théorème de convergence dominée :

$$\int_{(x_i)_{i \in I_{N_\ell} \setminus \{0\}} \in \mathbb{R}_+^{N_\ell - 1}} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(x_i)_{i \in I_{N_\ell} \setminus \{0\}} \in \mathbb{R}_+^{N_\ell - 1}} f_n(x) dx$$

par construction de f_n , on sait que :

$$\int_{(x_i)_{i \in I_{N_\ell} \setminus \{0\}} \in \mathbb{R}_+^{N_\ell - 1}} f_n(x) dx = \int_{\substack{(x_i)_{i \in I_{N_\ell} \setminus \{0\}}, \\ \sum \lfloor x_i(n - N_\ell) \rfloor \leq n - N_\ell}} f_n(x) dx = 1.$$

Donc finalement,

$$\int_{\substack{(x_i)_{i \in I_{N_\ell} \setminus \{0\}}, \\ \sum x_i < 1}} f(x) dx = \int_{(x_i)_{i \in I_{N_\ell} \setminus \{0\}} \in \mathbb{R}_+^{N_\ell - 1}} f(x) dx = 1.$$

On peut conclure par le lemme de Scheffé discret : pour tout $x > 0$ de somme $\sum_{i \in I_{N_\ell} \setminus \{0\}} x_i < 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{N_\ell - 1} \mathbb{P}^{n, N_b, N_t, p} (\Delta_i \mathbf{T}^L = \ell_i, \forall i \in I_{N_\ell}) = f(x)$$

où f est une densité, et donc $\frac{\Delta_i \mathbf{T}^L}{n}$ converge en loi vers $\Delta \mathbf{T}$ de densité f .

□

3 Définition sur \mathbb{Z}

Nous avons pu définir et étudier notre modèle sur un graphe fini, avec en particulier un nombre fini de balles. Une question naturelle est alors : peut-on définir un processus analogue sur un graphe infini, \mathbb{Z} par exemple ?

Ici, on tire l'état initial de chaque sommet, indépendamment les uns des autres : avec proba d_b c'est une balle, et avec proba d_t c'est un trou. On tire les activations des sommets (\mathbf{A}_u) , indépendamment également, en utilisant une loi $\mathcal{U}([0, 1])$ (sans atome). C'est là qu'apparaît la difficulté par rapport au cas fini : pour tout u , il y a presque sûrement un nombre infini de v tels que $A_v < A_u$, et donc un nombre infini de balles activées avant n'importe quel instant. Ainsi, montrer que chaque balle peut tomber dans un trou n'est pas trivial. Nous allons montrer qu'en fait, dès que la densité de balles d_b est strictement plus petite que celle de trous d_t , le processus est bien défini : une balle en u , à l'instant A_u , se déplace selon une marche aléatoire sur \mathbb{Z} , jusqu'à un trou libre.

On considère l'espace de proba $\Omega = (\{\mathbf{n}, \mathbf{b}, \mathbf{t}_L, \mathbf{t}_O\} \times (\mathbb{R}^+) \times (\{-1, +1\}^{\mathbb{N}}) \times \mathbb{Z})^{\mathbb{Z}}$ muni de la tribu produit. Une configuration, c'est donc la donnée, pour chaque sommet v , d'un état local de la forme :

$$Z(v) := (\eta_v, A_v, H_v, s_v)$$

que l'on interprète ainsi :

- η_v l'état du sommet : une balle en attente (\mathbf{b}), un trou libre (\mathbf{t}_L), un trou occupé (\mathbf{t}_O), ou rien du tout (\mathbf{n}),
- $A_v \in \mathbb{R}^+$ le temps d'activation de la boule en v , s'il y en a une,
- $H_v = (H_v(k), k \geq 0)$ la pile de flèches qui détermine la trajectoire de la boule initialement en v ,
- s_v la source de la balle qui est tombée dans le trou en v (pertinent que si $\eta_v = \mathbf{t}_O$).

Comme dans le cas fini, on souhaite activer les boules une par une, dans un ordre compatible avec leur temps d'activation : si $A_v < A_{v'}$, et si $\eta_v = \eta_{v'} = \mathbf{b}$, alors la boule en v cherche et trouve un trou avant que celle en v' ne soit activée.

On ajoute ensuite de l'aléa. On choisit l'état de chaque sommet indépendamment des autres, de la façon suivante : on fixe d_b la densité de balles et d_t la densité de trous de sorte que $d_b < d_t$, et alors les $\mathbf{Z}^{init}(v) = (\eta_v^{init}, \mathbf{A}_v, \mathbf{H}_v, \mathbf{s}_v)$ sont i.i.d., et pour tout v ,

- $\eta_v^{init} \sim \mu_{init}^{d_b, d_t}$, où $\mu_{init}^{d_b, d_t}$ est telle que $\mathbb{P}(\eta_v^{init} = \mathbf{b}) = d_b$, $\mathbb{P}(\eta_v^{init} = \mathbf{t}_L) = d_t$, et $\mathbb{P}(\eta_v^{init} = \mathbf{n}) = 1 - d_t - d_b$: chaque sommet contient une balle avec proba d_b , un trou avec proba d_t , indépendamment des autres sommets. L'hypothèse $d_b < d_t$, ce qui signifie, intuitivement, qu'il y a plus de trous que de balles (en terme de densité).
- les \mathbf{A}_v suivent une loi uniforme sur $[0, 1]$.
- \mathbf{H}_v est associée à une marche aléatoire sur \mathbb{Z} : pour tout v , et pour tout n , $(\mathbf{H}_v)_n$ vaut $+1$ avec probabilité p , et -1 sinon.
- enfin, pour tout v , $\mathbf{s}_v^{init} = v$ p.s.

On définit alors le processus : une balle en u (état $\eta_u = \mathbf{b}$), à l'instant \mathbf{A}_u , se déplace selon une marche aléatoire donnée par \mathbf{H}_u , jusqu'à un trou libre (v tel que $\eta_v = \mathbf{t}_L$). La balle tombe alors dans le trou : $\eta_u = \mathbf{n}$ et $\eta_v = \mathbf{t}_O$. On note \mathbf{Z}^f la configuration finale au temps 1, et $\text{Golf}^{\mathbb{Z}}[d_b, d_t, p]$ le modèle proposé, et $\mathbb{P}^{\mathbb{Z}, d_b, d_t, p}(\cdot)$ pour la loi du modèle $\text{Golf}^{\mathbb{Z}}[d_b, d_t, p]$. Nous allons maintenant prouver que \mathbf{Z}^f est bien définie.

Théorème 9. *Dans le modèle $\text{Golf}^{\mathbb{Z}}[d_b, d_t, p]$, si $d_b < d_t$, la configuration finale \mathbf{Z}^f est bien définie presque sûrement.*

Étant donné que l'on travaille maintenant sur un graphe infini, il est plus compliqué de montrer que chaque balle peut tomber dans un trou accessible en respectant l'ordre des balles induit par les temps d'activation. En effet, si l'on considère une certaine balle, presque sûrement une infinité de balles sont activées avant celle-ci. On pourrait donc imaginer des situations pathologiques dans lesquelles toutes les balles activées avant celle en 0 (ou avant la plus proche de 0 à sa droite, si 0 est inoccupé) ont bouché tous les trous disponibles, mais on va dans la suite montrer qu'avec probabilité 1 ce genre d'événement ne se produit pas. Plus précisément, nous allons montrer que le processus sur \mathbb{Z} est bien défini, de la manière suivante :

Idée générale de la preuve : Pour tout $l, r \in \mathbb{Z}$, $l < r$, on définit $\mathbf{Z}^{l,r}$ la configuration dans laquelle on a activé uniquement les balles dans l'intervalle $I_{l,r} := [-l, r]$, en respectant l'ordre des balles induit par les temps d'activation (ces balles peuvent avoir trouvé un trou à l'extérieur de $I_{l,r}$). On donne, éventuellement, une définition algorithmique de $\mathbf{Z}^{l,r}$ en annexe C.1.

Nous allons d'abord prouver que $\mathbf{Z}^{l,r}$ est bien définie, puis qu'il y a convergence locale vers la configuration dans laquelle on a activé toutes les balles sur \mathbb{Z} , c'est-à-dire vers \mathbf{Z}^f . Montrons donc la proposition suivante :

Proposition 10. *Pour tout v , $\lim_k \mathbf{Z}^{k,k}(v)$ existe presque sûrement. De plus, on a $\mathbf{Z}^f(v) = \lim_k \mathbf{Z}^{k,k}(v)$ (la limite spatiale permet de prendre en compte toutes les balles, de manière compatible avec leur ordre temporel, et donc permet de définir l'état du terrain de golf à la fin de la partie) et pour tout v , l'état final du sommet v , η_v^f , est tel que $\eta_v^f \in \{\mathbf{n}, \mathbf{t}_L, \mathbf{t}_O\}$ presque sûrement.*

Pour ce faire, on commencera par montrer que l'on peut progressivement agrandir l'intervalle dans lequel on a activé les balles, en respectant toujours l'ordre induit par les temps d'activation, mais sans avoir à faire revenir des balles en arrière : une flèche utilisée est toujours utilisée correctement, cela provient de la propriété de commutation démontrée dans la partie 2.1. On montrera ensuite que de cette façon l'état d'un sommet est modifié un nombre fini de fois, et donc que l'on peut parler de configuration limite. Nous allons donc prouver la proposition 10, avec plusieurs étapes intermédiaires :

Agrandissement de l'intervalle : Nous allons montrer qu'on peut calculer $\mathbf{Z}^{l,r+1}$ et $\mathbf{Z}^{l+1,r}$ à partir de $\mathbf{Z}^{l,r}$. On définit la procédure $\text{AlgoGolf}^{Z\text{-augmentation}}(\mathbf{Z}^{l,r}, l, r, k)$ qui, sur une configuration $\mathbf{Z}^{l,r}$ (sur laquelle on a activé les balles sur l'intervalle $I_{l,r}$, dans un ordre compatible avec les temps d'activation des balles), effectue la procédure suivante, dans le but d'obtenir la configuration sur laquelle on a activé les balles sur $I_{l,r} \cup \{k\}$, encore une fois dans un ordre compatible avec les temps d'activation des balles.

- si $\eta_k \neq \mathbf{b}$, : on ne fait rien ;
- si au contraire $\eta_k = \mathbf{b}$: on veut ajuster $\mathbf{Z}^{l,r}$ sans tout recalculer. On active la balle en k , celle-ci fait une marche aléatoire jusqu'à tomber soit sur un trou libre, soit sur un trou occupé par une balle ayant un temps d'activation plus grand (disons en position i). Dans ce dernier cas, la balle initialement en k prend la place i (puisque'elle a un temps d'activation plus petit que celle qui y est, elle est prioritaire sur ce trou), et en conséquence la balle en i doit reprendre sa marche aléatoire à la recherche d'un nouveau trou, libre ou avec une balle avec un temps d'activation plus grand, et ainsi de suite, jusqu'à ce que toutes les balles aient de nouveau trouvé un trou.

On donne une version algorithmique de $\text{AlgoGolf}^{Z\text{-augmentation}}$ en annexe C.2. On a alors le résultat suivant, grâce auquel on peut choisir d'agrandir progressivement l'intervalle dans lequel on a activé les balles :

Lemme 11. *Pour tous $l, r \geq 0$,*

$\mathbf{Z}^{l,r+1} = \text{AlgoGolf}^{Z\text{-augmentation}}(\mathbf{Z}^{l,r}, l, r, r+1)$, et $\mathbf{Z}^{l+1,r} = \text{AlgoGolf}^{Z\text{-augmentation}}(\mathbf{Z}^{l,r}, l, r, -(l+1))$.

Preuve. On a effectué un nombre fini de modifications, puisqu'il y a un nombre fini de balles dans $I_{l,r}$, et qu'une balle ne peut être réactivée (i.e. activée au cours de cette procédure) qu'une seule fois. Donc la procédure termine.

Par ailleurs on peut vérifier qu'après l'exécution de la procédure d'augmentation, pour chaque balle, sa trajectoire finale ne touche pas un trou bouché par une balle avec un temps d'activation plus grand. Donc la procédure donne bien une configuration identique à celle pour laquelle on a activé les balles dans le bon ordre directement, et donc on a bien les deux égalités données. \square

Remarque. La propriété de commutation (théorème 2) permet de dire que la loi est la même si on fait simplement partir la balle qu'on ajoute, mais ici c'est un peu plus fort, puisque en échangeant les balles comme on le fait avec cet algo, on a égalité des configurations, même en prenant en compte l'origine de chaque balle.

Pour conclure, on cherche à prouver que pour tout v , $(\mathbf{Z}^{-k,k}(v))_k$ est modifié un nombre fini de fois (lorsqu'on applique la procédure d'augmentation pour ajouter chaque sommet à la configuration initiale \mathbf{Z}^{init}). Pour ce faire, on introduit un nouveau modèle, que nous nommerons simplement le modèle auxiliaire, qui nous permettra de montrer que, pour toute configuration initiale avec une densité

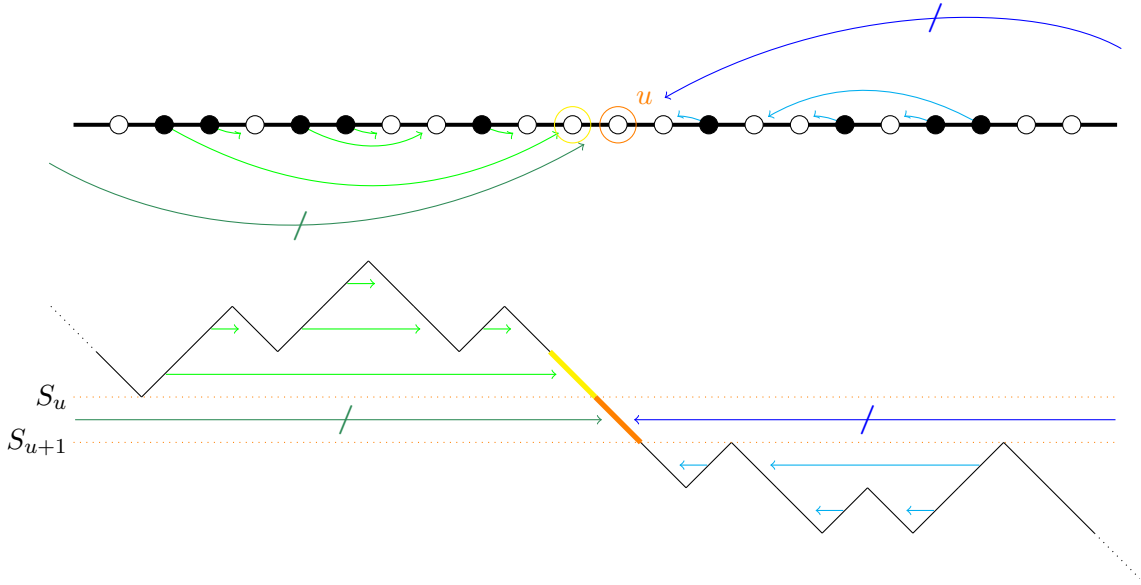


FIGURE 3 – Illustration de la correspondance entre le modèle avec des trous et des balles sur \mathbb{Z} et le modèle auxiliaire. Une balle (\bullet) correspond à une arête montante (+1) dans le modèle auxiliaire, tandis qu’un trou correspond au contraire à une arête descendante (-1). Si une arête, comme l’arête orange correspondant au sommet u , est telle qu’aucune arête montante n’est à son niveau, alors le trou en u est inaccessible : il ne sera jamais bouché, et donc les parties droites et gauches de u sont indépendantes. Ce n’est pas le cas pour l’arête jaune, pour laquelle la flèche verte qui pointe vers elle illustre le fait que le trou en $u - 1$ peut être bouché par une balle.

de balles d_b strictement inférieure à la densité de trous d_t , il existe presque sûrement une infinité de trous nécessairement libres (quels que soient, ensuite, les mouvements des balles).

Modèle auxiliaire :

$$\text{On note, pour tout } k, X_k := \begin{cases} 1 & \text{si } \eta_k = b \\ 0 & \text{si } \eta_k = n \\ -1 & \text{si } \eta_k = t_L \end{cases}.$$

X_k vaut donc 1 avec probabilité d_b , et -1 avec probabilité d_t . De plus toutes les X_k sont indépendantes.

On considère le chemin bi-infini associé à la marche aléatoire telle que $S_0 = 0$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $S_{k+1} = S_k + X_k$.

On sait, par la loi des grands nombres, que $S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$, et de même $S_n \xrightarrow[n \rightarrow -\infty]{} +\infty$. Montrons le résultat suivant, plus fort, qui en terme de trous et de balles signifie qu’il existe une infinité de trous inaccessibles (c’est à dire de trous pour lesquels, quelles que soient les marches des balles, aucune balle ne tombera aucun de ces trous). La correspondance entre le modèle auxiliaire et l’interprétation sur notre modèle est illustrée par la figure 3.

Lemme 12. *Presque sûrement, il existe une infinité de $k \in \mathbb{Z}$ tels qu’il existe un unique n vérifiant $(S_n, S_{n+1}) = (k, k - 1)$.*

Avant de prouver ce lemme, on a besoin d’un second lemme sur le modèle auxiliaire :

Lemme 13 (ergodicité du modèle auxiliaire). *On considère \mathcal{F} la σ -algèbre générée par les évènements ne dépendant que d’un nombre fini de X_n , et \mathbb{P}_{d_b, d_t} la mesure produit associée. Alors \mathbb{P}_{d_b, d_t} est invariante par translation et ergodique.*

Preuve du lemme 13. Duminil-Copin prouve un résultat équivalent (sur une autre mesure produit sur \mathbb{Z} , dans un modèle de percolation) [DC18, lemme 2.8]. La preuve fonctionne parfaitement ici, on ne la répète donc pas. \square

Preuve du lemme 12. En définissant

$$A_n := \left\{ \forall k < n, \sum_{j=k}^{n-1} X_j \leq 0 \right\} \cap \{X_n = -1\} \cap \left\{ \forall k > n, \sum_{j=n+1}^k X_j \leq 0 \right\},$$

on veut donc montrer que de manière équivalente, presque sûrement, il existe une infinité de n tels que A_n est réalisé.

On définit $N = \#\{n : A_n \text{ est réalisé}\}$. Montrons que pour tout $n \in N$, $N \geq n$ presque sûrement. Pour cela, on commence par montrer que $\mathbb{P}_{d_b, d_t}(N \geq n) > 0$, puis que $\mathbb{P}_{d_b, d_t}(N \geq n) \in \{0, 1\}$.

Pour tout n , l'évènement $\{N \geq n\}$ est invariant par translation, et donc par le lemme 13, $\mathbb{P}_{d_b, d_t}(N \geq n) \in \{0, 1\}$.

Montrons que par ailleurs $\mathbb{P}_{d_b, d_t}(N \geq n) > 0$. Il suffit de montrer que $\mathbb{P}_{d_b, d_t}(\cap_{i=1}^n A_i) > 0$.

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = \bigcap_{i=1}^n \{X_i = -1\} \cap \left\{ \forall k \leq 0, \sum_{j=k}^0 X_j \leq 0 \right\} \cap \left\{ \forall k > n, \sum_{j=n+1}^k X_j \leq 0 \right\}$$

On peut alors simplement calculer la probabilité de cet évènement : par indépendance des X_i ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{d_b, d_t} \left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right) &= \prod_{i=1}^n \mathbb{P}_{d_b, d_t}(X_i = -1) \times \mathbb{P}_{d_b, d_t} \left(\forall k \leq 0, \sum_{j=k}^0 X_j \leq 0 \right) \times \mathbb{P}_{d_b, d_t} \left(\forall k > n, \sum_{j=n+1}^k X_j \leq 0 \right) \\ &= (d_t)^n \times (p_0)^2 \end{aligned}$$

Où $p_0 = \mathbb{P}_{d_b, d_t}(\forall k > n, \sum_{j=n+1}^k X_j \leq 0)$. C'est la probabilité que la marche ne revienne jamais en S_n après le pas n , et cette probabilité est non nulle, puisque la chaîne associée est transiente ($S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$).

Ainsi, $\mathbb{P}_{d_b, d_t}(N \geq n) \geq \mathbb{P}_{d_b, d_t}(\cap_{i=1}^n A_i) > 0$, et donc $\mathbb{P}_{d_b, d_t}(N \geq n) = 1$. Finalement, $N = \infty$ presque sûrement, et donc le lemme 12 est prouvé. \square

On a maintenant tous les outils pour conclure :

Preuve de la proposition 10. D'après le lemme 12, il y a presque sûrement une infinité de trous nécessairement libres. Or, un trou libre signifie qu'aucune balle ne passe dessus, et en particulier un sommet entre deux trous libres et modifié un nombre fini de fois (comme dans le cas des graphes finis). Ainsi, pour tout v , $(Z^{-k, k}(v))_k$ est modifié un nombre fini de fois. On en déduit que la limite $\lim_k Z^{k, k}(v)$ est bien définie presque sûrement, pour tout v . De plus, tout état est final par construction. Enfin, l'égalité $Z^f(v) = \lim_k Z^{k, k}(v)$ est vraie par construction des $Z^{k, k}$ et d'après le lemme 12. \square

Le théorème 9 découle directement de la proposition 10.

Enfin, maintenant que Z^f est bien défini, on a la propriété suivante (qui est un corollaire immédiat du lemme 12) :

Proposition 14. *Presque sûrement, il existe une infinité de trous libres dans Z^f .*

4 Loi sur \mathbb{Z}

On se place de nouveau dans le modèle $\text{Golf}^Z[d_b, d_t, p]$, et on s'intéresse à la loi des trous libres dans la configuration finale, $\mathbf{T}^L = \{v \in \mathbb{Z} : \eta_v^f = \mathbf{t}_L\}$; cette variable aléatoire est bien définie presque sûrement, puisque Z^f l'est. Nous allons un peu plus bas énoncer le théorème 15, qui donne la loi de \mathbf{T}^L .

Pour simplifier, on supposera dans cette partie que $d_b + d_t = 1$ (le cas $d_b + d_t < 1$ est plus complexe en terme de calculs, mais le raisonnement serait fondamentalement le même).

On définit, comme sur le cercle, la famille $(\Delta_i \mathbf{T}^L)_{i \in \mathbb{Z}}$, la suite des distances inter-trous, de sorte que $\Delta_0 \mathbf{T}^L$ est la taille du bloc qui contient 0 (ou qui est à gauche de 0 si 0 est un trou). Ils sont ordonnés : pour $i > 0$ (respectivement $i < 0$), $\Delta_i \mathbf{T}^L$ est la distance entre le i ème et le $i + 1$ ème trou à droite (respectivement à gauche) de celui qui contient 0.

Avant d'énoncer le théorème 15 donnant la loi du processus $(\Delta_i \mathbf{T}^L)_{i \in \mathbb{Z}}$, on construit une famille de variables aléatoires qui jouent un rôle clé dans la suite. Soit $\lambda > 0$. On définit

$$g_n := \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = C_n, \quad \text{et} \quad h_n := (2n+1)g(2n) = (2n+1)C_n$$

où ici encore C_n est le n ème nombre de Catalan. On définit ensuite

$$\mathcal{G}(\lambda) = \sum_{k \geq 0} g_k \lambda^k, \quad \text{et} \quad \mathcal{H}(\lambda) = \sum_{k \geq 0} h_k \lambda^k = 2\lambda \mathcal{G}'(\lambda) + \mathcal{G}(\lambda).$$

Enfin, on pose, pour tout $k \geq 0$,

$$\mu_k^{(\lambda)} = \frac{g_k \lambda^k}{\mathcal{G}(\lambda)}, \quad \text{et} \quad \nu_k^{(\lambda)} = \frac{h_k \lambda^k}{\mathcal{H}(\lambda)}.$$

Théorème 15. *Dans le modèle Golf^Z $[d_b, d_t, p]$, les trous $\mathbf{T}^{\mathbf{L}}$ sont bien des variable aléatoires, et on a donc un processus $(\Delta_i \mathbf{T}^{\mathbf{L}})_{i \in \mathbb{Z}}$ qui indexe les distances inter-trous libres. Il s'agit d'un processus discret à valeurs dans \mathbb{Z} , et sous la topologie produit, sa loi est déterminée par les lois finies dimensionnelles : pour tout $R > 0$,*

$$\mathbb{P}(\Delta_i \mathbf{T}^{\mathbf{L}} = 2b_i, -R \leq i \leq R) = \mathbb{P}(\mathbf{L}_i^{(\lambda)} = 2b_i, -R \leq i \leq R) \quad (25)$$

où les variables aléatoires $(\mathbf{L}_i^{(\lambda)})_{i \in \mathbb{Z}}$ sont indépendantes et telles que $\forall k \geq 0, \mathbb{P}(\mathbf{L}_0^{(\lambda)} = 2k) = \nu_k^{(\lambda)}$, $\forall i \neq 0, \forall k \geq 0, \mathbb{P}(\mathbf{L}_i^{(\lambda)} = 2k) = \mu_k^{(\lambda)}$ et $\forall i, \forall k \geq 0, \mathbb{P}(\mathbf{L}_i^{(\lambda)} = 2k + 1) = 0$, et λ est l'unique réel tel que $\mathbb{E}[\mathbf{L}_i^{(\lambda)}] = \frac{2d_b}{2d_t - 1}$ (pour $i \neq 0$).

Remarque. λ a l'unique valeur telle que la longueur moyenne d'un bloc est compatible avec les densités de balles et de trous : il y a $\frac{\mathbf{L}_i^{(\lambda)}}{2}$ balles dans le bloc i , et $\frac{\mathbf{L}_i^{(\lambda)}}{2} + 1$ trous (on compte un des deux trous sur le bords). On veut donc avoir : $\mathbb{E}\left[\frac{\mathbf{L}_i^{(\lambda)}}{2}\right] = d_b \left(\mathbb{E}\left[\mathbf{L}_i^{(\lambda)}\right] + 1\right)$ et $\mathbb{E}\left[\frac{\mathbf{L}_i^{(\lambda)}}{2} + 1\right] = d_t \left(\mathbb{E}\left[\mathbf{L}_i^{(\lambda)}\right] + 1\right)$.

La résolution de ce système donne la condition $\mathbb{E}[\mathbf{L}_i^{(\lambda)}] = \frac{2d_b}{2d_t - 1}$. Dans la suite, on fixe λ tel que cette condition est vérifiée.

Le théorème énonce que les blocs sont donc indépendants, et de même loi à ceci près que le bloc qui contient 0 est biaisé par la taille (la loi biaisée par la taille d'une loi (p_k) , c'est la loi proportionnelle à (kp_k) , et ça s'interprète comme une sorte de marquage : l'origine 0 peut se trouver en k différentes positions sur le bloc auquel elle appartient, si celui-ci est de longueur k).

Idées clés de la preuve : sur \mathbb{Z} , et sur un grand cercle $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec $N_t(n)$ trous et $N_b(n)$, où $N_t(n)/n \sim d_t$ et $N_b(n)/n \sim d_b$, les $2R + 1$ trous "autour de 0" ont des lois proches. Nous allons donc utiliser le fait que l'on connaît la loi des distances inter-trous sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (proposition 7), et démontrer la convergence du modèle sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ vers le modèle sur \mathbb{Z} , dans un sens que nous allons définir. Nous allons montrer que, sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, les $\Delta_i \mathbf{T}^{\mathbf{L}}$ ont même loi qu'une famille de variables indépendantes dont on conditionne la somme à valoir $n - N_\ell$ (à la limite sur n , ce type de conditionnement, classique, se traite aisément). Ensuite, nous montrerons que l'environnement initial autour de 0 sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est asymptotiquement similaire à celui sur \mathbb{Z} , et que celui-ci suffit, avec grande probabilité, à déterminer la loi des $\Delta_i \mathbf{T}^{\mathbf{L}}$ au voisinage de 0. On conclura par un argument de couplage.

Étape 1 : Pour tout n , on pose $N_t(n) := \lfloor nd_t \rfloor$ et $N_b(n) := n - N_t(n)$, de sorte que $N_b(n) + N_t(n) = n$, $N_b(n) \sim d_b n$ et $N_t(n) \sim d_t n$. Ici encore, $N_\ell = N_t(n) - N_b(n)$.

Nous allons montrer que, sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, les $\Delta_i \mathbf{T}^{\mathbf{L}}$ ont même loi que les $\mathbf{L}_i^{(\lambda)}$ définies plus haut.

Lemme 16. *On considère les variables aléatoires $(\mathbf{L}_i^{(\lambda)})_{i \in I_{N_\ell}}$ indépendantes définies plus haut.*

On a égalité des lois suivantes :

$$\mathcal{L}\left((\Delta_i \mathbf{T}^{\mathbf{L}})_{i \in I_{N_\ell}}\right) = \mathcal{L}\left(\left(\mathbf{L}_i^{(\lambda)}\right)_{i \in I_{N_\ell}} \mid \sum \mathbf{L}_i^{(\lambda)} = n - N_\ell\right),$$

autrement dit, pour toute suite $(b_i)_{i \in I_{N_\ell}}$ telle que $\sum_{i \in I_{N_\ell}} 2b_i = n - N_\ell$, alors

$$\mathbb{P}^{n, N_b(n), N_t(n), p}(\forall i \in I_{N_\ell}, \Delta_i \mathbf{T}^{\mathbf{L}} = 2b_i) = \mathbb{P}\left(\forall i \in I_{N_\ell}, \mathbf{L}_i^{(\lambda)} = 2b_i \mid \sum_{i \in I_{N_\ell}} \mathbf{L}_i^{(\lambda)} = n - N_\ell\right).$$

La preuve de ce lemme, qui repose uniquement sur le calcul des deux probabilités, est disponible en annexe D.

Remarque. Les $\mathbf{L}_i^{(\lambda)}$ ($i \neq 0$) conditionnées par leur somme ont bien une espérance qui tend vers $\frac{2d_b}{2d_t-1}$. En effet, $\sum_{i \in I_{N_\ell}} \mathbf{L}_i^{(\lambda)} = n - N_\ell$ donne, en terme d'espérance $(N_\ell - 1)\mathbb{E}[\mathbf{L}_1^{(\lambda)}] + E[\mathbf{L}_0^{(\lambda)}] = n - N_\ell$, et donc finalement

$$\mathbb{E}[\mathbf{L}_1^{(\lambda)}] \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n - N_\ell}{N_\ell - 1} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1 - d_t + d_b}{d_t - d_b} = \frac{2d_b}{2d_t - 1}.$$

C'est donc cohérent avec la valeur du paramètre λ dans le théorème 15.

Étape 2 : Afin de justifier que l'approximation que l'on va faire ensuite, en approchant la loi sur \mathbb{Z} par la loi sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, est correcte, on veut montrer que, au voisinage de 0, une configuration initiale sur un grand cercle est asymptotiquement très proche, en loi, d'une configuration initiale sur \mathbb{Z} , également au voisinage de 0.

Lemme 17 (uniformité de l'approximation). *Soit I un intervalle fini de \mathbb{Z}*

$$\sup_{(x_i)_{i \in I} \in \{\mathbf{b}, \mathbf{t}_L\}^I} \left| \frac{\mathbb{P}^{n, N_b(n), N_t(n), p}(\forall i \in I, \boldsymbol{\eta}_i^{\text{init}} = x_i)}{\mathbb{P}^{\mathbb{Z}, d_b, d_t, p}(\forall i \in I, \boldsymbol{\eta}_i^{\text{init}} = x_i)} - 1 \right| \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$$

Preuve. Soit $(x_i)_{i \in I} \in \{\mathbf{b}, \mathbf{t}_L\}^I$. On peut montrer que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^{n, N_b(n), N_t(n), p}(\forall i \in I, \boldsymbol{\eta}_i^{\text{init}} = x_i) &= \frac{\binom{n-|I|}{N_t(n)-|\{i \in I: x_i = \mathbf{t}_L\}|}}{\binom{n}{N_t(n)}} \\ &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{N_t(n)^{|\{i \in I: x_i = \mathbf{t}_L\}|} N_b(n)^{|\{i \in I: x_i = \mathbf{b}\}|}}{n^{|I|}} \\ &\underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} d_t^{|\{i \in I: x_i = \mathbf{t}_L\}|} d_b^{|\{i \in I: x_i = \mathbf{b}\}|} \end{aligned}$$

La conclusion est alors immédiate puisque $\mathbb{P}^{\mathbb{Z}, d_b, d_t, p}(\forall i \in I, \boldsymbol{\eta}_i^{\text{init}} = x_i) = d_t^{|\{i \in I: x_i = \mathbf{t}_L\}|} d_b^{|\{i \in I: x_i = \mathbf{b}\}|}$, et $\{\mathbf{b}, \mathbf{t}_L\}^I$ est de cardinal fini. □

Étape 3 : Montrons maintenant que considérer l'environnement initial sur un intervalle suffisamment grand autour de 0 suffit, avec proba tendant vers 1, à déterminer les R trous libres à droite et à gauche de 0. Commençons avec le lemme suivant :

Lemme 18. *Soit $R > 0$. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que, avec proba plus grande que $1 - \epsilon$, l'intervalle $[-M, M]$ contient au moins R trous libres à gauche et R trous libres à droite de 0. Autrement dit,*

$$\mathbb{P}^{\mathbb{Z}, d_b, d_t, p}(|\mathbf{T}^L \cap [-M, -1]| \geq R \text{ et } |\mathbf{T}^L \cap [0, M]| \geq R) > 1 - \epsilon.$$

On a le même résultat sur les cercles suffisamment grands : pour tout $\epsilon > 0$, il existe M et n_0 tels que, pour tout $n \geq n_0$,

$$\mathbb{P}^{n, N_b(n), N_t(n), p}(|\mathbf{T}^L \cap [-M, -1]| \geq R \text{ et } |\mathbf{T}^L \cap [0, M]| \geq R) > 1 - \epsilon.$$

Preuve. Que ce soit sur \mathbb{Z} ou sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (avec n assez grand), on peut définir les variables \mathbf{T}^L_i , pour tout $i \in \mathbb{Z}$, correspondant au i ème trou par rapport à 0 (le trou indexé par 0 étant le plus grand entier $k < 0$ tel que $k \in \mathbf{T}^L$).

Sur \mathbb{Z} , on a montré (proposition 14) qu'il y a un nombre infini de trous, et une inspection de la preuve permet d'établir qu'il y en a une infinité à droite et à gauche de 0. Les positions des trous sont des variables aléatoires, et donc les $\mathbf{T}^L_i, -R \leq i \leq R$ sont des variables aléatoires presque sûrement finies, ce qui donne la première assertion.

Sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, nous allons utiliser le lemme 16 pour montrer que les trous libres $(\mathbf{T}^L_i^{(n)})_{-R \leq i \leq R}$ convergent en loi. Il suffit de montrer que $(\Delta_i \mathbf{T}^L_i^{(n)})_{-R \leq i \leq R-1}$ converge en loi. On a, pour $(b_i)_{-R \leq i \leq R}$ donnée,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\Delta_i \mathbf{T}^{\mathbf{L}^{(n)}} = 2b_i, -R \leq i \leq R-1\right) &= \mathbb{P}\left(\mathbf{L}_i^{(\lambda)} = 2b_i, -R \leq i \leq R-1 \mid \sum_{i \in I_{N_\ell}} \mathbf{L}_i^{(\lambda)} = n - N_\ell\right) \quad (26) \\
&= \prod_{i=-R}^{R-1} \mathbb{P}(\mathbf{L}_i^{(\lambda)} = 2b_i) \frac{\mathbb{P}\left(\sum_{i \in I_{N_\ell}, i \notin [-R, R-1]} \mathbf{L}_i^{(\lambda)} = n - N_\ell - \sum 2b_i\right)}{\mathbb{P}\left(\sum_{i \in I_{N_\ell}} \mathbf{L}_i^{(\lambda)} = n - N_\ell\right)} \quad (27)
\end{aligned}$$

Le théorème central local limite (voir par exemple [Vel, chapitre 2]) montre que, sous des conditions raisonnables (vérifiées par les $\mathbf{L}_i^{(\lambda)}$) sur S_n une somme de variables i.i.d. d'espérance μ et de variance σ^2 , pour toute suite x_n telle que $|x_n - \mu n| \leq A$ (où A est une constante quelconque),

$$\left| \mathbb{P}(S_n = x_n) - \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 n}} \exp\left(-\frac{(x_n - \mu n)^2}{2\sigma^2 n}\right) \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Rappelons que l'on considère λ tel que $\mathbb{E}[\mathbf{L}_i^{(\lambda)}] = \frac{2d_b}{2d_t - 1}$. Par conséquent, $\mathbb{E}[\sum_{i \in I_{N_\ell}} \mathbf{L}_i^{(\lambda)}] = N_\ell \frac{2d_b}{2d_t - 1} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n - N_\ell$. Ainsi, $|(n - N_\ell) - \mathbb{E}[\sum_{i \in I_{N_\ell}} \mathbf{L}_i^{(\lambda)}]|$ est bornée, de même pour $|(n - N_\ell - 2R) - \mathbb{E}[\sum_{i \in I_{N_\ell}, i \notin [-R, R-1]} \mathbf{L}_i^{(\lambda)}]|$, et on peut appliquer le théorème central local limite aux deux probabilités du quotient :

$$\frac{\mathbb{P}\left(\sum_{i \in I_{N_\ell}, i \notin [-R, R-1]} \mathbf{L}_i^{(\lambda)} = n - N_\ell - \sum 2b_i\right)}{\mathbb{P}\left(\sum_{i \in I_{N_\ell}} \mathbf{L}_i^{(\lambda)} = n - N_\ell\right)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Finalement,

$$\mathbb{P}\left(\Delta_i \mathbf{T}^{\mathbf{L}^{(n)}} = 2b_i, -R \leq i \leq R-1\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \prod_{i=-R}^{R-1} \mathbb{P}(\mathbf{L}_i^{(\lambda)} = 2b_i), \quad (28)$$

et donc on a notamment la convergence en loi des trous libres $(\mathbf{T}_i^{\mathbf{L}^{(n)}})_{-R \leq i \leq R}$. De cette convergence en loi, on peut déduire la deuxième assertion (car la limite est une loi, donc tendue). \square

Conclusion : Nous avons maintenant tous les outils pour conclure et prouver le théorème 15.

Preuve du théorème 15. Soit $R > 0$, et soit $\epsilon > 0$. D'après le lemme 18, il existe $M > 0$ tel que

$$\mathbb{P}^{\mathbb{Z}, d_b, d_t, p}(|\mathbf{T}^{\mathbf{L}} \cap [-M, -1]| \geq R+2 \text{ et } |\mathbf{T}^{\mathbf{L}} \cap [0, M]| \geq R+2) > 1 - \epsilon.$$

L'idée, pour conclure, est de se servir du fait que, dans le cas où $|\mathbf{T}^{\mathbf{L}} \cap [-M, -1]| \geq R+2$ et $|\mathbf{T}^{\mathbf{L}} \cap [0, M]| \geq R+2$, les positions des trous indicés de $-R$ à $R+1$ dépendent uniquement de la configuration à l'intérieur de l'intervalle $[-M, M]$. On sait donc qu'avec probabilité plus grande que $1 - \epsilon$, les variables aléatoires $\Delta_i \mathbf{T}^{\mathbf{L}}$, $-R \leq i \leq R$ ne dépendent que des $\mathbf{Z}^{init}(v)$, $-M \leq v \leq M$.

Par ailleurs, on a montré plus haut (équation 28) que :

$$\mathbb{P}\left(\Delta_i \mathbf{T}^{\mathbf{L}^{(n)}} = 2b_i, -R \leq i \leq R-1\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \prod_{i=-R}^{R-1} \mathbb{P}(\mathbf{L}_i^{(\lambda)} = 2b_i)$$

Il existe une constante B telle que $\sum_{(b_i) \in [0, B]^{2R+1}} \prod_{i=-R}^{R-1} \mathbb{P}(\mathbf{L}_i^{(\lambda)} = 2b_i) > 1 - \epsilon$, et il existe donc n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, et pour toute famille $(b_i) \in [0, B]^{2R+1}$,

$$\left| \mathbb{P}\left(\Delta_i \mathbf{T}^{\mathbf{L}^{(n)}} = 2b_i, -R \leq i \leq R-1\right) - \prod_{i=-R}^{R-1} \mathbb{P}(\mathbf{L}_i^{(\lambda)} = 2b_i) \right| \leq \frac{\epsilon}{(B+1)^{2R+1}} \quad (29)$$

(on aura besoin dans la suite que n soit plus grand que ce n_0 , pour pouvoir utiliser l'équation (29) et conclure).

On peut ensuite utiliser le lemme 17 : il existe un n (assez grand, et plus grand que n_0) pour lequel

$$\sup_{(x_i)_{i \in I} \in \{\mathbf{b}, \mathbf{t}_L\}^I} \left| \mathbb{P}^{n, N_b(n), N_t(n), p} \left(\forall i \in I, \boldsymbol{\eta}_i^{\text{init}(n)} = x_i \right) - \mathbb{P}^{\mathbb{Z}, d_b, d_t, p} \left(\forall i \in I, \boldsymbol{\eta}_i^{\text{init}} = x_i \right) \right| < \frac{\epsilon}{2^{2M+1}}.$$

(ici et dans la suite, on note $\boldsymbol{\eta}_i^{\text{init}(n)}$ pour l'état initial du sommet i dans le modèle sur le cercle).

Il existe donc un couplage des configurations initiales tel que $\forall i \in I, \boldsymbol{\eta}_i^{\text{init}(n)} = \boldsymbol{\eta}_i^{\text{init}}$ avec probabilité plus grande que $1 - 2^{2M+1} \frac{\epsilon}{2^{2M+1}} = 1 - \epsilon$.

Ainsi, avec probabilité plus grande que $1 - 2\epsilon$: $\forall i \in I, \boldsymbol{\eta}_i^{\text{init}(n)} = \boldsymbol{\eta}_i^{\text{init}}$ et les $\Delta_i \mathbf{T}^L, -R \leq i \leq R$ ne dépendent que des $\mathbf{Z}^{\text{init}}(v), -M \leq v \leq M$. On peut alors coupler les horloges et les trajectoires de toutes les balles : une balle en i sur le cercle et sur \mathbb{Z} démarre au même instant, elle fait un pas à droite sur le cercle si et seulement si elle fait le même pas à droite sur \mathbb{Z} , etc. Elle tombe donc sur le même trou sur \mathbb{Z} et sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Donc les trous indexés de $-R$ à $R+1$ sont identiques sur \mathbb{Z} et sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec probabilité $\geq 1 - 2\epsilon$, et donc finalement :

$$\text{avec probabilité } \geq 1 - 2\epsilon, \forall i \in [-R, R], \Delta_i \mathbf{T}^L(n) = \Delta_i \mathbf{T}^L.$$

On peut alors coupler les $\mathbf{L}_i^{(\lambda)}$ aux $\Delta_i \mathbf{T}^L(n)$: grâce à l'équation (29), il existe une façon de tirer $\mathbf{L}_i^{(\lambda)}$ de sorte que $\forall i, \mathbf{L}_i^{(\lambda)} = \Delta_i \mathbf{T}^L(n)$ avec proba plus grande que $1 - (B+1)^{2R+1} \frac{\epsilon}{(B+1)^{2R+1}} = 1 - \epsilon$.

Finalement :

$$\text{avec probabilité plus grande que } 1 - 3\epsilon, \forall i \in [-R, R], \Delta_i \mathbf{T}^L = \mathbf{L}_i^{(\lambda)}.$$

C'est vrai pour tout ϵ , et donc on en déduit que l'équation (25) est vraie : on a prouvé le théorème 15. □

5 Conclusion

Les objectifs, au cours de ce stage, étaient multiples. Nous partions d'un sujet assez vierge, en abordant notre modèle de golf d'un point de vue qui n'a pas vraiment été considéré auparavant (même si on peut, en creusant, faire des connexions avec d'autres modèles bien connus, comme le IDLA). C'était donc un bon moyen de se familiariser avec la recherche : il a fallu trouver des questions intéressantes à se poser, qui devaient être ni triviales ni insolubles, trouver les résultats (notamment avec des simulations) et les prouver. Travailler à la fois sur le modèle fini, en se concentrant finalement vers le cercle, et sur le modèle sur des graphes infinis, avec l'étude sur \mathbb{Z} , a permis d'avoir un grand aperçu de la multitude d'outils, probabilistes mais aussi combinatoires, qui existent actuellement dans le domaine (et bien sûr ce n'était qu'un aperçu). On a pu définir et étudier le modèle sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur \mathbb{Z} , et le rapport aboutit sur le calcul de la loi des trous libres sur \mathbb{Z} . C'est un résultat fort, puisque rien que démontrer l'existence de ce processus a pris beaucoup de temps.

Bien sûr, la compréhension du modèle n'est pas du tout atteinte, et il reste de nombreuses pistes à explorer. Déjà, d'autres graphes que le cercle pourraient être intéressants. Par exemple, on a pu voir sur le cercle $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ que le comportement des trous finalement occupés était bien plus complexe que celui des trous libres, et notamment qu'il dépendait de p de manière non triviale. On pourrait donc chercher à comprendre ce comportement, et peut être à exprimer la loi des trous occupés.

Une autre question pour l'instant sans réponse est celle de la définition sur d'autres graphes infinis, par exemple \mathbb{Z}^d , ou sur des arbres infinis. Sur \mathbb{Z}^2 , la méthode utilisée, qui consiste à définir sur un intervalle que l'on fait grandir progressivement, offre une piste de généralisation (ici on agrandirait progressivement un carré centré sur 0), mais cela nous a semblé nettement plus compliqué. Ensuite, en dimension supérieure, la non-réurrence des marches aléatoires pourrait entrer en jeu, mais peut être y a-t-il tout de même un moyen de définir correctement un modèle analogue. Enfin, sur \mathbb{Z} , on définit uniquement le modèle pour $d_b < d_t$, et la question de sa définition dans le cas $d_b = d_t$ est encore en suspens.

Remerciements

J'ai eu la chance d'être accueillie au LaBRI par des personnes scientifiquement et humainement incroyables, qu'elles soient permanentes ou doctorantes/stagiaires. Mon encadrant, Jean-François Marckert, m'a accordé énormément de temps. Il a été une source impressionnante de connaissances, il a pris le temps de creuser avec moi mon sujet de stage, mais également de m'expliquer des détails scientifiques dont je n'imaginai même pas l'existence, et c'est un plaisir d'avoir eu grâce à lui un petit panorama de l'immensité du domaine ! Il m'a aussi conseillé d'assister, au mois de mars, aux Journées ALEA (une semaine d'exposés sur des sujets très variés touchant à des structures aléatoires discrètes), journées qui ont été très enrichissantes et m'ont confortées dans l'idée de poursuivre en thèse dans un domaine proches des thématiques d'ALEA. J'ai aussi pu assister aux séminaires hebdomadaires de l'équipe, et à la conférence CanaDAM, cette fois sur des sujets un peu plus variés de mathématiques discrètes. Marthe Bonamy, qui m'a notamment parlé de cette dernière conférence, a également été très présente tout au long du stage, en particulier au cours du confinement. Merci à elle, ainsi qu'à Luis Fredes et Vincent Delecroix, et aux nombreux doctorants avec qui j'ai pu échanger, pour les discussions scientifiques que l'on a pu avoir sur leurs sujets de recherche très divers, mais aussi parfois sur le mien. C'est d'ailleurs suite à une question de Vincent que nous nous sommes posé la question de la limite asymptotique de la loi des trous libres sur le cercle, à nombre de balles et de trous fixés. Je remercie enfin les autres stagiaires, et en particulier Sarah, ma "coloc de bureau", qui ont apporté de la vie à ce stage, et avec qui j'ai pu travailler régulièrement autour d'un tableau.

Références

- [Bet14] Jérémie Bettinelli. Increasing forests and quadrangulations via a bijective approach. Journal of Combinatorial Theory, Series A, 122 :107–125, 2014. 12
- [CW11] Sylvie Corteel and Lauren K Williams. Tableaux combinatorics for the asymmetric exclusion process and Askey-Wilson polynomials. Duke Mathematical Journal, 159(3) :385–415, 2011. 2
- [DC18] Hugo Duminil-Copin. Introduction to Bernoulli percolation. Lecture notes available on the webpage of the author, 2018. 15
- [DEHP93] B Derrida, M R Evans, V Hakim, and V Pasquier. Exact solution of a 1D asymmetric exclusion model using a matrix formulation. Journal of Physics A : Mathematical and General, 26(7) :1493–1517, apr 1993. 2
- [DF91] Persi Diaconis and William Fulton. A growth model, a game, an algebra, Lagrange inversion, and characteristic classes. Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino, 49(1) :95–119, 1991. 3, 4, 5
- [FM21] Luis Fredes and Jean-Francois Marckert. Aldous-Broder theorem : extension to the non reversible case and new combinatorial proof, 2021. <https://arxiv.org/abs/2102.08639>. 3
- [GA13] Alexandre Gaudilliere and Amine Asselah. Sub-logarithmic fluctuations for internal DLA. Annals of Probability, 41 :1160–1179, 2013. 3
- [JLS11] David Jerison, Lionel Levine, and Scott Sheffield. Logarithmic fluctuations for internal DLA, 2011. 3
- [LBG92] Gregory F Lawler, Maury Bramson, and David Griffeath. Internal diffusion limited aggregation. The Annals of Probability, pages 2117–2140, 1992. 3
- [Lig99] T.M. Liggett. Stochastic Interacting Systems : Contact, Voter and Exclusion Processes, volume 324. Springer Science & Business Media, 1999. 1
- [Lig05] T.M. Liggett. Interacting particle systems. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2005. Reprint of the 1985 original. 1
- [Swa20] Jan M. Swart. A Course in Interacting Particle Systems, 2020. 1
- [Vel] Y Velenik. Chapitres choisis de théorie des probabilités. Version du 12 avril 2021. 19

Pour tous $l, r \geq 0$, on définit $\mathbf{Z}^{l,r} = \text{AlgoGolf}^{Z\text{-intervalle}}(Z^{\text{init}}, l, r)$, où $\text{AlgoGolf}^{Z\text{-intervalle}}$ est la fonction définie dans l'algorithme 3.

On peut finalement montrer que $\mathbf{Z}^{l,r}$ est bien définie :

Proposition 19. *On se place, ici également, dans le modèle $\text{Golf}^Z[d_b, d_t, p]$. Pour tous $l, r \geq 0$, $p \in [0, 1]$ et $0 < d_b < d_t$ tels que $d_b + d_t \leq 1$, $\mathbf{Z}^{l,r}$ est bien définie.*

Preuve. La preuve est très proche de celle du théorème 1, puisqu'ici encore il y a un nombre fini de balles, il suffit donc de prouver que chacune d'elle trouve un trou. Par indépendance des \mathbf{Z}_u , il y a un nombre infini de trous disponibles de chaque côté des balles, et en particulier, pour chaque balle, il y a un trou disponible à sa droite, et un à sa gauche. Alors, quel que soit le paramètre p de la marche biaisée ou non considérée, la marche aléatoire sur \mathbb{Z} effectuée par la balle finit par tomber sur un de ces deux trous. \square

C.2 Algorithme $\text{AlgoGolf}^{Z\text{-augmentation}}$

Algorithme 4 : $\text{AlgoGolf}^{Z\text{-augmentation}}(Z, l, r, i)$

Entrées : $(Z = ((\eta_v, A_v, H_v, s_v))_{v \in V}, l, r, i)$

Sorties : $Z^{l,r}$

```

/* On active la balle en i s'il y en a une, et on fait les ajustements
   nécessaires */
u ← i;
S ← i; /* provenance de la balle courante */
tant que  $\eta_u \neq f$  faire
     $(u, h_S) \leftarrow (u + (h_S)_1, t(h_S))$ 
    si  $\eta_u = o$  et  $A_S < A_{s_u}$  alors
        /* la balle provenant de S prend la place de celle qui était jusque là
           dans le trou en u (et provenait de  $s_u$ ), et c'est donc celle provenant
           de  $s_u$  qui repart */
         $S, s_u \leftarrow s_u, S$ ;
    fin
fin
 $\eta_u \leftarrow o$ ;
 $s_u \leftarrow S$ ;
retourner  $Z^{l,r} = ((\eta_v, A_v, H_v, s_v))_{v \in V}$ 

```

D Preuve du lemme 16

Preuve du lemme 16. Soit $(\ell_i)_{i \in I_{N_\ell}}$ une suite telle que $\sum_{i \in I_{N_\ell}} \ell_i = n - N_\ell$.

Comme $N_b(n) + N_t(n) = n$, il n'y pas d'emplacement vide, et nécessairement :

$$\mathbb{P}^{n, N_b(n), N_t(n), p} (\forall i \in I_{N_\ell}, \Delta_i \mathbf{T}^L = \ell_i) \neq 0 \text{ si et seulement si pour tout } i, \ell_i \text{ est pair.}$$

Soit donc $b_i := \ell_i/2$, on peut alors simplifier le résultat de la proposition 7 :

$$\mathbb{P}^{n, N_b(n), N_t(n), p} (\forall i \in I_{N_\ell}, \Delta_i \mathbf{T}^L = 2b_i) = \frac{2b_0 + 1}{|C^{n, N_b, N_t}|} \prod_{i \in I_{N_\ell}} \frac{1}{b_i + 1} \binom{2b_i}{b_i, b_i, 0} \quad (30)$$

$$= \frac{1}{|C^{n, N_b, N_t}|} h(b_0) \prod_{i \in I_{N_\ell}, i \neq 0} g(b_i) \quad (31)$$

De plus, pour les $\mathbf{L}_i^{(\lambda)}$, on peut calculer :

$$\mathbb{P} \left(\forall i \in I_{N_\ell}, \mathbf{L}_i^{(\lambda)} = 2b_i \mid \sum_{i \in I_{N_\ell}} \mathbf{L}_i^{(\lambda)} = n - N_\ell \right) = \frac{\mathbb{P} \left(\forall i \in I_{N_\ell}, \mathbf{L}_i^{(\lambda)} = 2b_i \right)}{\mathbb{P} \left(\sum_{i \in I_{N_\ell}} \mathbf{L}_i^{(\lambda)} = n - N_\ell \right)} \quad (32)$$

$$= \frac{\prod_{i \in I_{N_\ell}} \mathbb{P} \left(\mathbf{L}_i^{(\lambda)} = 2b_i \right)}{\mathbb{P} \left(\sum_{i \in I_{N_\ell}} \mathbf{L}_i^{(\lambda)} = n - N_\ell \right)} \quad (33)$$

$$= \frac{\lambda^{n-N_\ell} h(b_0) \prod_{i \in I_{N_\ell}, i \neq 0} g(b_i)}{\mathbb{P} \left(\sum_{i \in I_{N_\ell}} \mathbf{L}_i^{(\lambda)} = n - N_\ell \right) \mathcal{H}(\lambda) \mathcal{G}(\lambda)^{N_\ell-1}} \quad (34)$$

On remarque que les membres de droite de (31) et (34) sont proportionnels. Comme de plus les lois de $(\Delta_i \mathbf{T}^{\mathbf{L}})$ et de $(\mathbf{L}_i^{(\lambda)})$ ont le même support, on en déduit qu'il y a en fait égalité, et donc que :

$$\mathbb{P}^{n, N_b(n), N_t(n), p} (\forall i \in I_{N_\ell}, \Delta_i \mathbf{T}^{\mathbf{L}} = 2b_i) = \mathbb{P} \left(\forall i \in I_{N_\ell}, \mathbf{L}_i^{(\lambda)} = 2b_i \mid \sum_{i \in I_{N_\ell}} \mathbf{L}_i^{(\lambda)} = n - N_\ell \right).$$

□