

Exemple de système de particules en interaction : le TASEP sur différents graphes

Zoé Varin
ENS de Lyon

Encadrée par Régine Marchand
Institut Élie Cartan de Lorraine, Nancy

Mars–Juillet 2022

Résumé

Le *TASEP* est un processus d'exclusion sur un certain graphe, et plus précisément un système de particules en temps continu, sur lequel des particules peuvent apparaître sur certains sommets, disparaître sur d'autres, ou bien sauter d'un sommet à un voisin libre; toutes ces opérations se faisant selon des variables aléatoires exponentielles indépendantes. Ce système est donc un processus de Markov en temps continu. Une question naturelle est alors de connaître la loi stationnaire (qui existe et est unique) de ce processus.

Sur le chemin $\{0, \dots, N\}$, un papier très connu de Derrida et al. ([DEHP93]) donne une forme matricielle pour la loi stationnaire, exprimant ainsi les poids des configurations, sous la loi stationnaire, comme un produit de matrices. Une question naturelle est alors de chercher une forme analogue à la forme matricielle (très utile pour calculer certaines caractéristiques du modèle) à d'autres graphes, par exemple les arbres. Nous mentionnons dans ce rapport plusieurs pistes explorées dans cette direction, qui concluent plutôt par la négative pour la question de l'existence de telles formes "pertinentes" pour les calculs.

Par ailleurs, la publication [DEHP93] met en avant un "cas commutatif", dans lequel toutes les matrices sont des scalaires, et la loi stationnaire est simplement un produit de variables de Bernoulli indépendantes. Nous généralisons ce "cas commutatif" à la famille des réseaux de flots.

1 Introduction

1.1 Contexte et motivation

Les processus d'exclusion sont une famille de systèmes de particules en interactions, dans laquelle on considère un processus sur un graphe, sur lequel on autorise des particules à se déplacer, le long d'une arête du graphe, avec la condition qu'il y ait toujours au maximum une particule par sommet. Afin que ce processus soit markovien (plus précisément, un processus de Markov en temps continu), on décide que chaque particule attende un temps exponentiel avant de tenter un saut sur un sommet voisin, saut qu'elle effectue uniquement si le voisin choisi est libre.

Les systèmes de particules ont été très étudiés, en tant que sujet de recherche à part entière, depuis une cinquantaine d'années. On pourra notamment se référer à [Lig05] ou [Swa20] pour un bon aperçu de l'étendue du domaine. Les probabilistes voient les systèmes de particules comme des processus temporels, à valeurs mesures : la loi du système, c'est-à-dire, la probabilité d'observer une certaine configuration évolue avec le temps. Connaître la loi μ^t du système au temps t est la question générique, en général difficile; d'autres questions concernent l'existence et l'unicité de mesures invariantes (les mesures μ^t constantes sous l'action du système), ainsi que les questions concernant la convergence de μ^t vers une mesure invariante par exemple. En fait, d'un point de vue probabiliste, parfois la seule définition du processus est difficile à prouver (notamment lorsque le nombre de couleurs est infini). Par ailleurs, dans beaucoup de cas, on sait dire si la mesure stationnaire existe et est unique, et on peut l'exprimer comme solution d'un

système linéaire, mais la taille de ce système étant exponentielle en le nombre de sommets du graphe, cette solution est bien souvent compliquée à exploiter directement.

Les physiciens utilisent les systèmes de particules en tant que modèle théorique de systèmes physiques avec un grand nombre de particules ; on pensera notamment au modèle d'Ising, l'un des plus classiques car très pertinent malgré sa simplicité, qui permet de modéliser le comportement ferromagnétique de certains matériaux. Ce modèle est simple, mais permet par exemple de modéliser la perte de la propriété magnétique du fer lorsque la température atteint un seuil, modélisant correctement le changement de phase réel en question.

Enfin, un certain nombre de modèles possèdent des propriétés algébriques remarquables, et sont étudiés par des méthodes algébriques, et même combinatoires. Par exemple, dans le cas du TASEP (pour *totally asymmetric simple exclusion process*), le processus sur le chemin $\{0, \dots, N\}$ a pu être résolu complètement de manière algébrique, en exprimant le poids des états sous la loi stationnaire comme un produit de matrices [DEHP93]. Cette expression matricielle permet de bien mieux comprendre la structure des poids des états sous la loi stationnaire, et ainsi de calculer des caractéristiques intéressantes du modèle, par exemple des corrélations entre les états des différents sommets, ou bien des caractéristiques plus spécifiques au modèle sur le chemin comme le courant ou des densités d'occupations. Par ailleurs, de nombreux progrès ont été faits sur une légère variante de ce modèle avec des méthodes combinatoires, en utilisant des tableaux [CW11]. C'est sur le modèle du TASEP que nous travaillons dans la suite, avec pour objectif d'améliorer la compréhension de la loi stationnaire du processus, sur des graphes plus généraux que le chemin, et notamment d'essayer de généraliser cette forme matricielle à d'autres graphes.

1.2 Définition du modèle

On définit le TASEP (Totally Asymmetric Simple Exclusion Process) sur un graphe orienté $G = (V, A)$ fini. On distingue $S \subseteq V$ et $T \subseteq V$, les ensembles de sommets entrants (les sources) et sortants (les puits). A est un ensemble d'arêtes orientées, ou arcs. On munit S , T et A de poids, respectivement $(\alpha_s)_{s \in S}$, $(\beta_t)_{t \in T}$ et $(w_a)_{a \in A}$.

Une configuration sur G , c'est un élément de $\{0, 1\}^V$, où 1 exprime la présence d'une particule sur le sommet correspondant (qui est alors occupé), et 0 son absence (le sommet est alors libre).

Informellement, on définit la dynamique suivante :

- pour chaque sommet $s \in S$, on ajoute une particule sur le sommet s , si celui-ci est libre, à taux α_s , c'est à dire selon une horloge aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre α_s .
- pour chaque sommet $t \in T$, si o est occupé par une particule, celle-ci est éliminée (elle sort) à taux β_t .
- pour chaque arête $a = (u, v) \in A$, une particule présente en u saute en v , si v est libre, à taux w_a .

Par ailleurs, on note $\alpha := \sum_{s \in S} \alpha_s$ et $\beta := \sum_{t \in T} \beta_t$. Enfin, on pose $n := |V|$

Le TASEP sur G est alors le processus de Markov à temps continu, à valeur dans $\{0, 1\}^V$, et dont le générateur infinitésimal M est tel que, si $\tau \neq \tau'$, $M_{\tau, \tau'} = W(\tau \rightarrow \tau')$, et $M_{\tau, \tau} = -\sum_{\tau' \neq \tau} W(\tau \rightarrow \tau')$, où les taux de saut $W(\tau \rightarrow \tau')$ sont définis ainsi, pour tout $\tau, \tau' \in W(\tau \rightarrow \tau')$:

- si il existe $s \in S$ tel que $\tau'_s = 1$, $\tau_s = 0$, et pour tout $v \neq s$, $\tau'_v = \tau_v$, alors $W(\tau \rightarrow \tau') = \alpha_s$;
- si il existe $t \in T$ tel que $\tau'_t = 0$, $\tau_t = 1$, et pour tout $v \neq t$, $\tau'_v = \tau_v$, alors $W(\tau \rightarrow \tau') = \beta_t$;
- si il existe $a = (u, v) \in A$ tel que $\tau'_u = 1 - \tau_u = 0$, $\tau'_v = 1 - \tau_v = 1$, et pour tout $w \neq u, v$, $\tau'_w = \tau_w$, alors $W(\tau \rightarrow \tau') = w_a$.
- sinon, $W(\tau \rightarrow \tau') = 0$.

Remarque (Lien avec les taux de sauts et les probabilités de transitions). Considérons T_n la configuration du processus après le n -ième saut, et S_n le temps passé dans le n -ième état. $(T_n)_n$ est une chaîne de Markov à temps discret. Pour tout n ,

$$\mathbb{P}(T_{n+1} = \sigma | T_n = \tau) = \frac{W(\tau \rightarrow \sigma)}{\sum_{\sigma' \neq \tau} W(\tau \rightarrow \sigma')} = \frac{M_{\tau, \sigma}}{-M_{\tau, \tau}}.$$

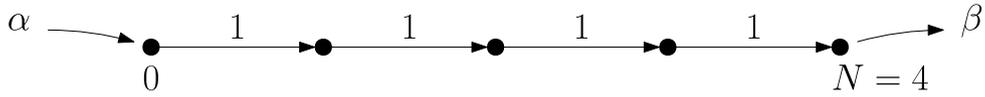


FIGURE 1 – Le TASEP sur le chemin de longueur 4.

De plus, conditionnellement aux $(T_i)_{i \leq k}$, les variables $(S_i)_{i \leq k}$ sont des variables exponentielles indépendantes, de paramètres $(-M_{T_i, T_i})_{i \leq k}$.

On s'intéresse dans toute la suite à la loi stationnaire de ce processus, et donc on n'a pas besoin de définir de distribution initiale sur $\{0, 1\}^V$.

Loi stationnaire. On peut aisément vérifier que le processus ainsi défini est irréductible (et donc récurrent puisque l'espace d'état est fini), et donc qu'il admet une unique loi stationnaire. Cette loi stationnaire μ est l'unique solution de l'équation $\mu M = 0$, qui peut être réécrit ainsi :

$$\forall \tau \in \{0, 1\}^V, \quad \sum_{\tau' \in \{0, 1\}^V} W(\tau' \rightarrow \tau) \mu(\tau') = \left(\sum_{\tau' \in \{0, 1\}^V} W(\tau \rightarrow \tau') \right) \mu(\tau) \quad (1)$$

Contenu du rapport. Nous allons d'abord considérer, dans la section 2, le TASEP le chemin $\{0, \dots, N\}$. Une particule peut entrer à taux α en 1, sortir à taux β en N , et enfin sauter de i à $i+1$ à taux 1. Dans ce cas, qui a été résolu par Derrida et ses coauteurs [DEHP93], on connaît une expression matricielle de la loi stationnaire, et cette expression est utile pour calculer énormément de caractéristiques du modèle.

L'objectif de ce stage était de chercher s'il était possible de généraliser à d'autres graphes (sur des arbres par exemple) cette expression matricielle pour la loi stationnaire. Nous mentionnerons donc les diverses pistes que nous avons explorées. Nous verrons d'abord qu'un cas particulier du modèle sur le chemin, cas dit "commutatif" et dans lequel la loi stationnaire s'exprime comme un produit de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes, se généralise à une famille de graphes bien plus grandes, les réseaux de flots.

Dans la section suivante (Section 4), nous verrons plusieurs pistes que nous avons explorées au cours du stage, qui étaient intéressantes même si elles n'ont pas permis de conclure positivement.

2 Le TASEP sur un chemin fini

Dans une série d'articles ([DDM92, DEHP93]), Derrida et ses coauteurs étudient le TASEP sur le chemin fini de taille N (voir Figure 1) : ici $V = \{0, \dots, N\}$, et $A = \{\{i, i+1\}, 0 \leq i < N\}$. Une particule peut entrer sur le sommet 0 à taux α , sortir du sommet N à taux β , et sauter du sommet i au sommet $i+1$ (s'il est libre) à taux 1.

Le résultat principal de l'article [DEHP93] donne une expression algébrique pour la loi stationnaire. On considère des matrices carrées D et E , un vecteur ligne $\langle W|$ et un vecteur colonne $|V\rangle$ tels que :

$$DE = D + E \quad (2)$$

$$D|V\rangle = \frac{1}{\beta}|V\rangle \quad (3)$$

$$\langle W|E = \frac{1}{\alpha}\langle W| \quad (4)$$

Pour tout quadruplet $(D, E, \langle W|, |V\rangle)$ vérifiant (2)-(4), la loi stationnaire \mathbb{P}_N est telle que

$$\mathbb{P}_N(\tau) = f_N(\tau)/Z_N, \quad (5)$$

où

$$f_N(\tau) = \langle W| \prod_{i=0}^{N-1} (\tau_i D + (1 - \tau_i) E) |V\rangle \quad (6)$$

et

$$Z_N = \sum_{\tau \in \{0,1\}^{N+1}} f_N(\tau). \quad (7)$$

De plus de tes quadruplets existent.

Dans l'article [DDM92], les auteurs donnaient une expression récursive pour les f_N , mais cette expression ([DDM92, équation (9)]) était trop compliquée pour être exploitable. Dans l'article [DEHP93], l'idée clé est d'écrire f_N sous la forme (6) et de faire apparaître le système (2)-(4). Alors, une relation de récurrence entre le poids d'une configuration sur le chemin de taille N et ses sous-configurations (vues comme des configurations sur le chemin de taille $N - 1$) apparaît "naturellement" ([DEHP93, (23)-(25)]). Cela permet notamment de montrer, par une sorte de télescopage, que f_N ainsi définie est bien stationnaire (voir également la reformulation dans [BE07, Section 3.1] pour plus de précisions).

Il y a alors deux cas pour le quadruplet $(D, E, \langle W |, |V \rangle)$, selon la valeur de $\alpha + \beta$ (voir [DEHP93, Section 4.]).

Cas particulier où $\alpha + \beta = 1$ (cas commutatif). Dans ce cas, on peut prendre $D = 1/\beta$, $E = 1/\alpha$, $\langle W |$ et $|V \rangle$ quelconques, et alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_N(\tau) &= \prod_{i=1}^N (\alpha\tau_i + \beta(1 - \tau_i)) \\ &= \alpha^T (1 - \alpha)^{N-T}, \end{aligned}$$

où $T = \sum_{i=1}^N \tau_i$.

Ainsi, la loi stationnaire est un produit de bernoulli indépendantes de paramètre α .

Cas général, $\alpha + \beta \neq 1$. Dans ce cas, on peut montrer qu'il n'existe pas de matrices finies vérifiant (2)-(4). Cependant les auteurs donnent plusieurs choix de quadruplets infinis permettant tout de même de faire des calculs.

Par ailleurs, pour $(D, E, \langle W |, |V \rangle)$ quelconque (c'est à dire en n'utilisant que le système (2)-(4) et la définition de f_N), Derrida et ses coauteurs donnent des expressions (exactes et asymptotiques) pour les taux d'occupations moyens $\langle \tau_i \rangle_N$, le courant $J = \langle \tau_i(1 - \tau_{i+1}) \rangle_N$, ou plus globalement les corrélations $\langle \tau_i \tau_j \rangle_N$.

3 Cas où la loi stationnaire suit une loi produit

Nous avons vu dans la partie précédente que sur le chemin, quand $\alpha + \beta = 1$, la loi stationnaire s'exprime simplement, comme un produit de variables de Bernoulli indépendantes. En fait, en travaillant sur d'autres graphes que le chemin (l'arbre b -aire et le chemin épais, que l'on décrit dans la section suivante), nous nous sommes aperçu que ce cas commutatif se généralise à toute une famille de graphes, les réseaux de flots. On définit donc les réseaux de flots, et ensuite on donne le résultat principal de ce rapport, le théorème 1, qui donne des hypothèses suffisantes pour que la loi stationnaire soit de nouveau un produit (sur les sommets) de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes et identiquement distribuées.

Pour une arête $a \in A$, on note a^- le sommet entrant de cette arête, et a^+ le sommet sortant. Ainsi on a toujours $a = (a^-, a^+)$. On peut alors définir les réseaux de flots.

Définition (Réseau de flot). *Un graphe orienté $G = (V, A)$ pondéré par $w = (w_a)_{a \in A}$ est un réseau de flot de S à T de valeur $|w|$ si*

- *Il y a conservation du flot en dehors de S et T : pour tout sommet $u \in V \setminus (S \cup T)$,*

$$\sum_{a:a^- = u} w_a = \sum_{a:a^+ = u} w_a$$
- *La valeur du flot partant des sources (et donc arrivant aux puits) est w :*

$$\sum_{s \in S} \left(\sum_{a:a^- = s} w_a - \sum_{a:a^+ = s} w_a \right) = |w|$$

(et donc

$$\sum_{t \in T} \left(\sum_{a: a^+ = t} w_a - \sum_{a: a^- = t} w_a \right) = |w|.$$

Remarques.

- Classiquement, pour un réseau de flot, les arêtes ont une capacité maximale $(c_a)_{a \in A}$, on contraint tout flot w à ne pas dépasser les capacités des arêtes (pour toute arête $a \in A$, on impose $w_a \leq c_a$), et on cherche à maximiser $|w|$ sous ces contraintes (c'est le problème de flot maximum). Ici, on s'intéresse uniquement à un flot particulier, on n'a pas besoin de considérer des capacités maximales.
- Ici on considère une définition plus générale que la définition usuelle, puisque il peut y avoir plusieurs sources et puits, et un sommet donné peut être à la fois source et puits (dans le TASEP, cela renviendra à autoriser une particule à la fois à entrer et sortir de ce sommet). Habituellement on considère les flots d'un sommet source s (sans arcs entrants) à un sommet puits t (sans arcs sortants), et ces hypothèses en général non réductrices, puisqu'on peut souvent modifier un graphe avec plusieurs sources s_1, \dots, s_k en ajoutant une *supersource* s^* , reliée à toutes les sources par une arête de capacité infinie. On peut de même passer d'un graphe avec plusieurs puits à un graphe avec un seul *superpuits*.
- Le chemin fini, défini dans la section précédente, est un réseau de flot de valeur 1, avec 0 pour sommet source et N pour sommet puits. Le théorème suivant est une généralisation aux réseaux de flots du cas commutatif $\alpha + \beta = 1$ sur les chemins (cas dans lequel la loi stationnaire est une loi produit).

Théorème 1. *On considère le TASEP sur un réseau de flot, tel que $\alpha + \beta = |w| \neq 0$,*

$$\forall s \in S, \quad \sum_{a: a^- = s} w_a - \sum_{a: a^+ = s} w_a = \frac{\alpha_s |w|}{\alpha}, \quad (8)$$

et

$$\forall t \in T, \quad \sum_{a: a^+ = t} w_a - \sum_{a: a^- = t} w_a = \frac{\beta_t |w|}{\beta}. \quad (9)$$

Le processus ainsi défini a une loi stationnaire produit : sous la loi stationnaire, $\tau_u \stackrel{i.i.d.}{\sim} \mathcal{B}\left(\frac{\alpha}{|w|}\right)$, pour tout $u \in V$.

Remarque (Discussion sur les hypothèses (8) et (9)). Ces hypothèses peuvent paraître un peu abstraites, mais en fait elles sont assez naturelles. Si $|S| = 1$, l'égalité est triviale par définition de la valeur du flot $|w|$, et sinon on demande simplement à répartir la valeur entrante du flot proportionnellement aux poids (α_s) qu'on a assignés aux sommets entrants.

Remarques.

- Très informellement, on peut voir la condition $\alpha + \beta = 1$, que l'on avait sur le chemin, comme "ce qui rentre + ce qui sort = ce qui passe dans le graphe". On peut donner ce même sens à l'égalité $\alpha + \beta = |w|$ dans ce théorème.
- (Discussion sur les hypothèses (8) et (9)). Ces hypothèses peuvent paraître un peu abstraites, mais en fait elles sont assez naturelles. Si $|S| = 1$, l'égalité est triviale par définition de la valeur du flot $|w|$, et sinon on demande simplement à répartir la valeur entrante du flot proportionnellement aux poids (α_s) qu'on a assignés aux sommets entrants.
- Les hypothèses (8) et (9) imposent que S et T soient disjoints (puisque $\sum_{a: a^- = s} w_a - \sum_{a: a^+ = s} w_a$ est de signe constant). On pourrait essayer de s'affranchir de cette hypothèse, mais nous n'avons pas réussi à trouver des hypothèses permettant d'obtenir de nouveau une loi stationnaire produit.
- Le cas $|w| = 0$ est un cas un peu dégénéré. On peut certainement calculer la loi stationnaire dans certains cas, mais d'autres sont très compliqués. Par exemple, dans le cas du cercle $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ où tous les sommets sont à la fois des sommets entrants et sortants, et toutes les arêtes ont poids 1, alors la loi stationnaire est un produit $\mathcal{B}\left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right)^{\otimes V}$. Cependant si certains sont entrants et d'autres sortants, il ne semble pas y avoir de paramètres

non triviaux pour lesquels la loi stationnaire est une loi produit. La question reste donc ouverte.

Preuve. On définit μ telle que pour toute configuration $\tau = (\tau_u)_{u \in V}$,

$$\mu(\tau) = \prod_{u \in V} \left(\frac{\alpha}{|w|} \mathbb{1}_{\tau_u=0} + \frac{\beta}{|w|} \mathbb{1}_{\tau_u=1} \right) = \frac{1}{|w|^n} \alpha^{k_\tau} \beta^{n-k_\tau},$$

où $k_\tau := \sum_{u \in V} \tau_u$.

Montrons que μ est stationnaire (puisqu'il y a unicité de la loi stationnaire), et donc que

$$\forall \tau \in \{0, 1\}^V, \quad \sum_{\tau' \in \{0, 1\}^V} W(\tau' \rightarrow \tau) \mu(\tau') = \left(\sum_{\tau' \in \{0, 1\}^V} W(\tau \rightarrow \tau') \right) \mu(\tau) \quad (10)$$

Soit donc $\tau \in \{0, 1\}^V$. Commençons par réécrire une partie du membre de droite :

$$\sum_{\tau' \in \{0, 1\}^V} W(\tau \rightarrow \tau') = \sum_{s \in S} \alpha_s (1 - \tau_s) + \sum_{a \in A} w_a \tau_{a^-} (1 - \tau_{a^+}) + \sum_{t \in T} \beta_t \tau_t \quad (11)$$

On peut alors calculer :

$$\sum_{\tau' \in \{0, 1\}^V} W(\tau' \rightarrow \tau) \frac{\mu(\tau')}{\mu(\tau)} = \sum_{s \in S} \alpha_s \tau_s \frac{\beta}{\alpha} \quad (12a)$$

$$+ \sum_{a \in A} w_a (1 - \tau_{a^-}) \tau_{a^+} \quad (12b)$$

$$+ \sum_{t \in T} \beta_t (1 - \tau_t) \frac{\alpha}{\beta} \quad (12c)$$

$$= \sum_{s \in S} \left(\alpha_s (1 - \tau_s) + \frac{\alpha_s |w|}{\alpha} \tau_s \right) - \alpha \quad (13a)$$

$$+ \sum_{a \in A} w_a (\tau_{a^-} (1 - \tau_{a^+}) - \tau_{a^-} + \tau_{a^+}) \quad (13b)$$

$$+ \sum_{t \in T} \left(\beta_t \tau_t - \frac{\beta_t |w|}{\beta} \tau_t \right) + \alpha \quad (13c)$$

$$= \sum_{s \in S} \alpha_s (1 - \tau_s) + \sum_{a \in A} w_a \tau_{a^-} (1 - \tau_{a^+}) + \sum_{t \in T} \beta_t \tau_t \quad (14a)$$

$$+ \sum_{s \in S} \tau_s \left(\frac{\alpha_s |w|}{\alpha} - \sum_{a: a^- = s} w_a + \sum_{a: a^+ = s} w_a \right) \quad (14b)$$

$$+ \sum_{u \in V \setminus (S \cup T)} \tau_u \left(\sum_{a: a^+ = u} w_a - \sum_{a: a^- = u} w_a \right) \quad (14c)$$

$$+ \sum_{t \in T} \tau_t \left(-\frac{\beta_t |w|}{\beta} - \sum_{a: a^- = t} w_a + \sum_{a: a^+ = t} w_a \right) \quad (14d)$$

$$= \sum_{\tau' \in \{0, 1\}^V} W(\tau \rightarrow \tau') \quad (15a)$$

La première égalité s'obtient en sommant sur toutes les configurations τ' depuis lesquelles on peut atteindre τ en une transition, soit en ajoutant une particule sur un sommet entrant $s \in S$ libre ((12a) (si $\tau_s = 1$, alors on choisit $\tau'_s = 0$, $\tau'_u = \tau_u$ pour tout $u \neq s$, et dans ce cas $\mu(\tau') = \frac{\beta}{\alpha} \mu(\tau)$)), soit en faisant sauter une particule le long d'une arête $a \in A$ (12b), soit enfin en faisant sortir une particule d'un sommet sortant $t \in T$ (12c) (le raisonnement dans ces cas est similaire au premier).

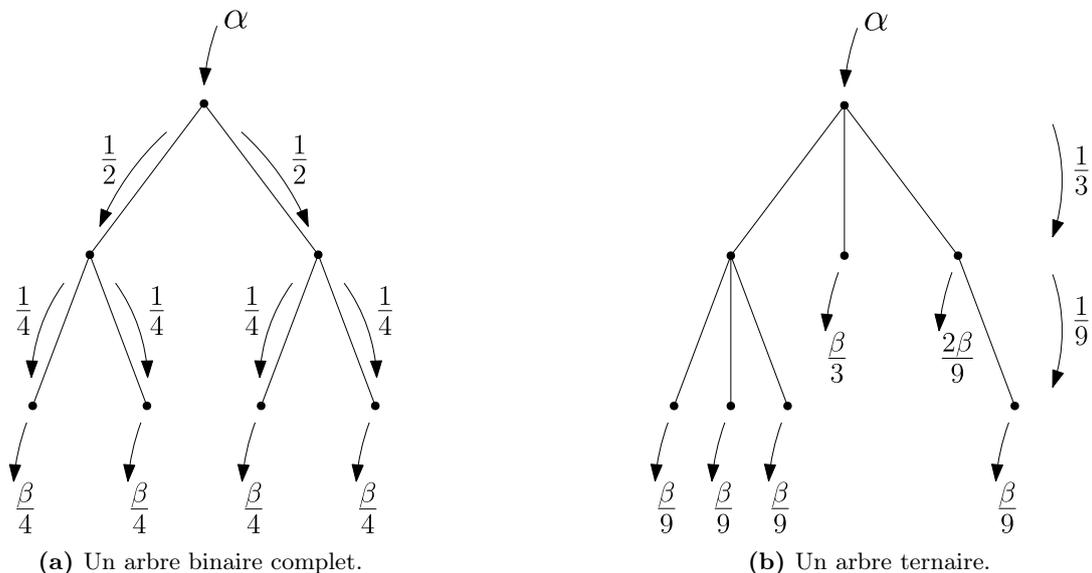


FIGURE 2 – Deux exemples de TASEP sur des arbres de hauteur 2.

(13a) s'obtient à partir de (12a) en remarquant que

$$\frac{\alpha_s \beta}{\alpha} \tau_s = \left(\frac{\alpha_s |w|}{\alpha} - \alpha_s \right) \tau_s = \alpha_s (1 - \tau_s) + \frac{\alpha_s |w|}{\alpha} \tau_s - \alpha_s.$$

Des calculs similaires permettent d'obtenir (13b) et (13c) à partir de (12b) et (12c). On peut passer de (13a)-(13c) à (14a)-(14d) par simple réorganisation des termes, et enfin tous les membres de (14b)-(14d) s'annulent (grâce aux hypothèses (8), (9) et à l'hypothèse de conservation du flot). On obtient alors (15a) grâce à (11).

On a donc montré (10), ce qui conclut la preuve du théorème. \square

4 À la recherche d'une forme matricielle pour la loi stationnaire sur d'autres graphes

L'objectif initial du stage était de chercher à généraliser à d'autres graphes le résultat de [DEHP93] qui exprime la loi stationnaire sous forme matricielle. La première piste était celle des arbres, qui garde une certaine linéarité dans la structure. Une autre piste, qui paraissait plus prometteuse, était celle des "chemins épais". Nous allons définir ces cas particuliers, voir pourquoi ils étaient prometteurs, et pourquoi finalement ça n'a pas pu aboutir.

4.1 Le TASEP sur un arbre b -aire.

Un arbre b -aire complet est un arbre tel que tous les sommets autres que les feuilles ont degré b , et toutes les feuilles sont à la même hauteur (voir par exemple la figure (2a)). Comme dans la section précédente, on considère un réseau de flot, afin qu'il y ait conservation du flux. La manière la plus naturelle de définir les poids sur l'arbre régulier est de les répartir de manière symétrique, et donc de les diviser par b à chaque étage. Par exemple sur la figure (2a), les arêtes sortant de la racine ont poids $1/2$, tandis que celles qui sortent des fils de la racine ont poids $1/4$. Plus généralement, sur un arbre b -aire régulier de hauteur h , on note $p(u)$ le parent du sommet u (pour tout u autre que la racine), et alors l'arête $a = (p(u), u)$ a poids $w_a = \frac{1}{b^k}$, si le sommet u est au niveau k . (Par convention, la racine est au niveau 0). Par ailleurs, l'entrée ne peut se faire qu'à la racine, à taux α , et la sortie se fait au niveau des feuilles, à taux $\frac{\beta}{b^h}$ (b^h est le nombre total de feuilles).

Une question naturelle est alors de généraliser cette définition du TASEP aux arbres b -aires non complets (par exemple l'arbre figure (2b)). Sur un arbre b -aire (non nécessairement complet), on propose de considérer le TASEP avec la dynamique suivante :

- Une particule entre à la racine r , si celle-ci est libre, à taux α .
- Pour $u \neq r$ au niveau k , une particule saute de $p(u)$ à u (si u libre) à taux $1/b^k$.
- Si u au niveau k a $f(u)$ enfants, alors une particule présente en u peut sortir à taux $\frac{\beta(b-f(u))}{b^{k+1}}$.

Remarques.

- Le TASEP ainsi défini sur les arbres b -aires vérifie les hypothèses du théorème 1, c'est un réseau de flot de valeur 1, et donc si $\alpha + \beta = 1$, alors la loi stationnaire suit une loi produit $\mathcal{B}(\alpha)^{\otimes V}$.
- Nous avons choisi cette définition sur les arbres car elle semblait être naturelle, en terme de structure, et notamment de conservation du courant, à l'extension de la définition du TASEP sur la ligne. C'est notamment cette définition qui est utilisée dans l'article de Mottishaw et ses coauteurs [MWE13]. Dans un article de Basu et Mohanty, une définition différente est choisie : une particule sur un sommet est activée à taux 1, et quand elle est activée elle saute uniformément sur un de ses enfants étant libre. Cette subtilité a un impact important sur le comportement du modèle, dont l'étude est très différente à cause de la perte de l'indépendance des sous-arbres (le saut d'une particule d'un sommet à un de ses enfants dépend de l'occupation des autres enfants). En terme de comportement physique, ce dernier modèle a un comportement moins riche, et ne présente pas de transitions de phases, contrairement au TASEP sur la ligne [DDM92, DEHP93] ou sur l'arbre [MWE13] (avec notre définition).

Absence de structure récursive dans le cas non commutatif. Avec Maple, on peut facilement calculer la loi stationnaire sur des petits arbres. Si il ne paraît pas évident qu'on puisse transmettre la forme matricielle aux arbres, malgré la linéarité sous-jacente, on a tout de même cherché à récupérer une structure récursive, c'est à dire à exprimer les poids d'un arbre à N sommets en fonction de ceux d'un arbre à $N - 1$ sommets. (C'est ce qui était fait sur le chemin, où par exemple $\alpha f_N(0, \tau_2, \dots, \tau_N) = f_{N-1}(\tau_2, \dots, \tau_N)$, etc.)

Des calculs en Maple ont permis de conclure qu'il n'y avait pas ce genre de structure pour les arbres, notamment en comparant la loi stationnaire pour le TASEP sur l'arbre binaire à 3 sommets à celle sur tous ses sous arbres.

Une question dans le cas commutatif reste cependant ouverte. En effet, dans le cas commutatif (c'est à dire le cas où $\alpha + \beta = 1$, cas dans lequel le théorème 1 s'applique), il y a égalité, en loi, entre le processus sur un certain arbre T restreint à un sous-arbre T' , et le processus défini sur T' directement (c'est un corollaire direct du théorème 1). On pourrait donc se demander s'il serait possible de "coupler" ces deux processus sous la loi stationnaire.

4.2 Existence d'une forme matricielle des modèles plus généraux de processus sur le chemin

La publication de Blythe et Evans [BE07] fait un état de l'art sur des processus ayant des états stationnaires exprimables sous forme de produit de matrice. Dans la section 9.1, il est fait référence au résultat de [KS97], qui donne l'existence de forme matricielle pour toute une famille de modèles "with open boundaries", c'est à dire sur le chemin $\{0, \dots, N\}$, avec des entrées et sorties possibles aux bords. Dans l'article [KS97] le théorème est plus général et formulé en termes plutôt physique (avec des hypothèses sur le Hamiltonien du processus), mais informellement il peut être résumé de la manière suivante :

Proposition 2. *Si le processus est tel que*

- chaque sommet i a un état $\tau_i \in \{1, \dots, b\}$
- les sauts sont locaux : les sauts se font selon des modifications locales de la forme $\tau_1 \rightarrow \tau'_1$, $\tau_N \rightarrow \tau'_N$ ou $\tau_i \tau_{i+1} \rightarrow \tau'_i \tau'_{i+1}$ indépendamment de i .

Alors il existe $\langle W |, |V \rangle$ et X_0, \dots, X_b telles que pour tout N , pour tout $\tau \in \{0, \dots, b\}^{N+1}$,

$$f_N(\tau) = \langle W | X_{\tau_0} \dots X_{\tau_N} | V \rangle$$

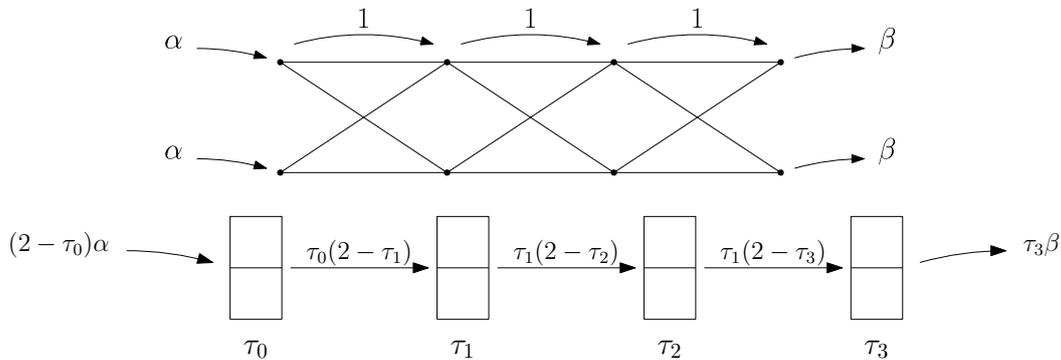


FIGURE 3 – Un exemple de chemin épais : le chemin épais de longueur 3 et d'épaisseur 2, et sa correspondance en terme de processus sur le chemin de longueur 3.

La preuve de ce résultat est constructive, mais la construction des vecteurs $\langle W |$ et $|V \rangle$ et des matrices X_0, \dots, X_b suppose la connaissance de tous les poids $f_N(\tau)$, pour tout τ et pour tout N . Par ailleurs, comme pour le cas général sur le chemin (cas $\alpha + \beta \neq 1$), ces matrices sont infinies. Ce résultat paraît donc peu exploitable en pratique. Nous donnons dans la section suivante un cas dans lequel nous savons justement que de telles matrices infinies existent, mais nous ne savons pas en exhiber sans faire tous les calculs des $f_N(\tau)$, ce qui nous est impossible.

Un autre article auquel il est fait référence dans la publication de [BE07] est celui de Hieida et Sasamoto [HS04], qui donne des conditions suffisantes pour vérifier l'existence de matrices de taille fixée (finie) vérifiant (6).

4.3 Le TASEP sur le chemin épais.

Une autre généralisation naturelle du chemin est le chemin d'épaisseur b (voir exemple Figure (3)), toutes les arêtes ont poids 1 et sont orientées vers la droite, tous les sommets entrants ont un poids α , et les sortants un poids β .

On peut voir le processus sur le chemin de largeur b et de longueur N comme un processus sur le chemin (simple) de taille N , mais pour lequel on autorise b particules par sommet. Une configuration est donc un élément $\tau \in \{0, \dots, b\}^{N+1}$, sur lequel on autorise les transitions suivantes :

- Une particule peut entrer en 0 à taux proportionnel à la place qu'il reste : $\tau_0 \rightarrow \tau_0 + 1$ à taux $(b - \tau_0)\alpha$. (Cela revient exactement à considérer $(b - \tau_0)$ variables exponentielles de paramètre α , d'où l'équivalence des deux modèles).
- Une particule peut sortir en N à taux proportionnel au nombre de particules présentes : $\tau_N \rightarrow \tau_N - 1$ à taux $\tau_N\beta$.
- Enfin, une particule peut sauter de la position i à la position $i + 1$ à taux proportionnel à la fois à la place libre à l'arriver, et au nombre de particules présentes au départ : $\tau_i, \tau_{i+1} \rightarrow \tau_i - 1, \tau_{i+1} + 1$ à taux $\tau_i(b - \tau_{i+1})$.

Ici encore on s'intéresse à la loi stationnaire de ce processus. On peut commencer par remarquer que dans le cas où $\alpha + \beta = b$ (c'est à dire $\alpha b + \beta b = |w|$), le théorème 1 sur les réseaux de flots s'applique, et donc la loi stationnaire est un produit de bernoulli indépendantes de paramètre α/b .

Considérons maintenant le cas général. D'après les résultats mentionnés dans la sous-section précédente (Proposition 2), il existe des matrices infinies donnant une forme matricielle à la loi stationnaire. Mais comme précisé plus haut, la construction est inexploitable en pratique. Par ailleurs, on a pu tester le critère de Hieida et Sasamoto [HS04] sur des petits cas, mais cela n'a pas été concluant : soit des matrices finies n'existent pas (hors cas commutatif $\alpha + \beta = b$ bien sûr), soit elles existent mais sont trop grandes pour appliquer le critère et faire des calculs avec Maple.

Une autre piste pour trouver une forme matricielle était de chercher des relations qui seraient

satisfaites par les vecteurs $\langle W|$ et $|V\rangle$, ainsi que les matrices X_0, \dots, X_b , en s'inspirant des relations (2)-(4) dans le cas du chemin simple. On a écrit l'ensemble des $\frac{d}{dt}f_0(\tau_0)$ et $\frac{d}{dt}f_1(\tau_0, \tau_1)$ en fonction des $f_0(\sigma_0)$ et $f_1(\sigma_0, \sigma_1)$ (où $\tau_0, \tau_1, \sigma_0, \sigma_1 \in \{0, 1\}$). Par exemple, $\frac{d}{dt}f_0(1) = -\alpha f_0(1) + 2\alpha f_0(0) - \beta f_0(1) + 2\beta f_0(2)$. On suppose ici que pour tout N et tout τ ,

$$f_N(\tau) = \langle W|X_{\tau_1} \dots X_{\tau_N}|V\rangle.$$

On a envie d'écrire une égalité de la forme $\alpha\langle W|X_0 = \langle W|$, comme dans le cas du chemin simple. Si on impose cette première égalité (à une constante près), on obtient un ensemble d'égalités sur $\langle W|, |V\rangle, X_0, X_1$ et X_2 , nécessaires pour que $\frac{d}{dt}f_N(\tau) = 0$ (pour $N = 0$ et $N = 1$, et $\tau \in \{0, 1\}^{N+1}$) :

$$\begin{array}{ll} X_2X_1 = X_1 & 2\alpha\langle W|X_0 = 2\langle W| \\ X_1X_0 = X_1 & \beta X_1|V\rangle = 2|V\rangle \\ X_1X_1 = 2X_2 + 2X_0 & \alpha\langle W|X_1 = 2\langle W| \\ 4X_2X_0 = 2X_0 + 2X_2 & 2\beta X_2|V\rangle = 2|V\rangle \end{array}$$

On peut alors montrer que tout quintuplet $(\langle W|, |W\rangle, X_0, X_1, X_2)$ vérifiant ces équations est tel que f_N , définie par $f_N(\tau) = \langle W|X_{\tau_1} \dots X_{\tau_N}|V\rangle$, pour tout τ , est bien stationnaire (pour tout N).

Cependant, l'existence d'un tel quadruplet impliquerait que pour tout τ_1 , $\alpha f_1(0, \tau_1) = f_0(\tau_1)$, c'est à dire $\frac{\alpha}{Z_1}\mathbb{P}_1(0, \tau_1) = \frac{1}{Z_0}\mathbb{P}_0(\tau_1)$. On a pu vérifier avec Maple que cette égalité était impossible, et donc qu'il ne peut pas y avoir de quintuplet $(\langle W|, |W\rangle, X_0, X_1, X_2)$ vérifiant le système d'équation écrit juste au dessus.

5 Conclusion

Nous partions du résultat de [DEHP93] donnant une loi stationnaire sur forme d'un produit de matrice pour le TASEP sur le chemin. Nous avons cherché à généraliser cette forme matricielle à d'autres graphes, et en toute généralité nous avons principalement des résultats négatifs. Cependant, nous arrivons à généraliser le cas commutatif, cas dans lequel la loi stationnaire est une loi produit, aux réseaux de flots sur lesquels certaines hypothèses sont satisfaites.

Au cours du stage, j'ai aussi pu profiter d'un cadre scientifique et humain très positif. J'ai pu assister aux journées Aléa, à Marseille, ainsi qu'aux séances hebdomadaires du séminaire de l'équipe de proba de l'IECL. J'ai d'ailleurs présenté les travaux de mon stage précédent au groupe de travail de l'équipe. Enfin, j'ai pu participer à une MasterClass de probabilités et de géométrie, ce qui était très enrichissant également puisque c'était des cours sur des sujets de recherches que je ne maîtrisais pas forcément.

Références

- [BE07] R A Blythe and M R Evans. Nonequilibrium steady states of matrix-product form : a solver's guide. Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical, 40(46) :R333–R441, oct 2007. [4](#), [8](#), [9](#)
- [CW11] Sylvie Corteel and Lauren K Williams. Tableaux combinatorics for the asymmetric exclusion process and Askey-Wilson polynomials. Duke Mathematical Journal, 159(3) :385–415, 2011. [2](#)
- [DDM92] B. Derrida, E. Domany, and D. Mukamel. An exact solution of a one-dimensional asymmetric exclusion model with open boundaries. Journal of Statistical Physics, 69(3) :667–687, Nov 1992. [3](#), [4](#), [8](#)
- [DEHP93] B Derrida, M R Evans, V Hakim, and V Pasquier. Exact solution of a 1D asymmetric exclusion model using a matrix formulation. Journal of Physics A : Mathematical and General, 26(7) :1493–1517, apr 1993. [1](#), [2](#), [3](#), [4](#), [7](#), [8](#), [10](#)
- [HS04] Y Hieida and T Sasamoto. Construction of a matrix product stationary state from solutions of a finite-size system. Journal of Physics A : Mathematical and General, 37(42) :9873–9889, oct 2004. [9](#)
- [KS97] Klaus Krebs and Sven Sandow. Matrix product eigenstates for one-dimensional stochastic models and quantum spin chains. Journal of Physics A : Mathematical and General, 30(9) :3165–3173, may 1997. [8](#)
- [Lig05] T.M. Liggett. Interacting particle systems. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2005. Reprint of the 1985 original. [1](#)
- [MWE13] Peter Mottishaw, Bartłomiej Waclaw, and Martin R Evans. An exclusion process on a tree with constant aggregate hopping rate. Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical, 46(40) :405003, sep 2013. [8](#)
- [Swa20] Jan M. Swart. A Course in Interacting Particle Systems, 2020. [1](#)