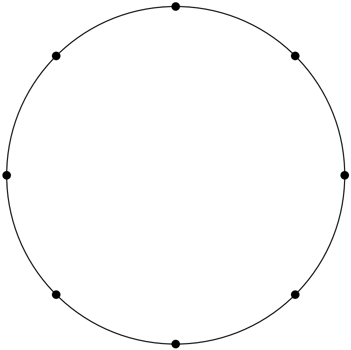
Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur $\mathbb{Z}$

Zoé Varin, LaBRI, Université de Bordeaux

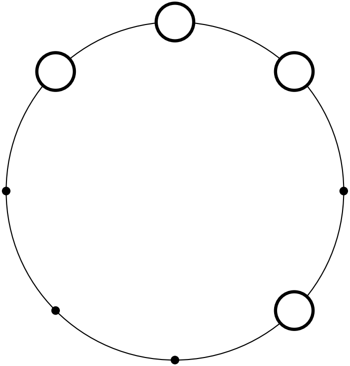
16 Mars 2023

Définition du modèle

$G = (V, E)$, ici le cercle $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$



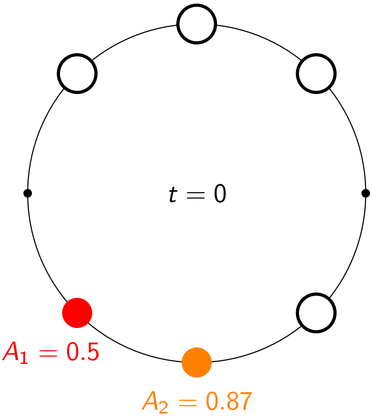
Définition du modèle



N_t trous :

$$\boldsymbol{T}^{init} = \left\{ \bigcirc \right\}$$

Définition du modèle



N_t trous :

$$\boldsymbol{T}^{init} = \{\bigcirc\}$$

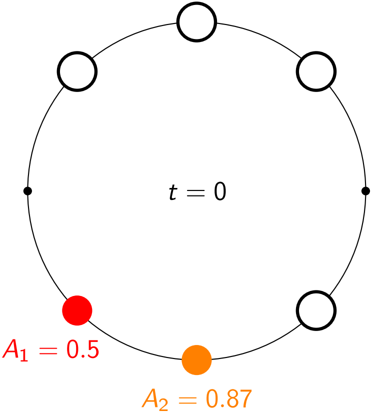
N_b balles :

$$\boldsymbol{B}^{init} = \{\bullet, \bullet, \bullet, \ldots\}$$

une horloge par balle :

$$\boldsymbol{A}_v \sim \mathcal{U}\left([0,1]\right)$$

Définition du modèle



N_t trous :

$$\boldsymbol{T}^{init} = \{\bigcirc\}$$

N_b balles :

$$\boldsymbol{B}^{init} = \{\bullet, \bullet, \bullet, \dots\}$$

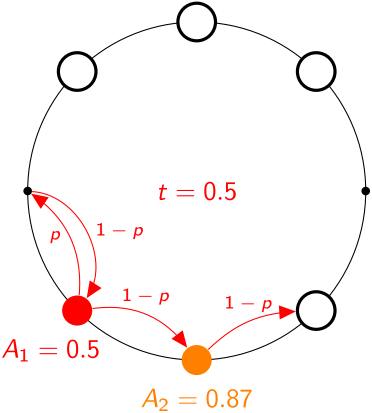
une horloge par balle :

$$\boldsymbol{A}_v \sim \mathcal{U}([0, 1])$$

$$(\boldsymbol{B}^{init}, \boldsymbol{T}^{init}) \sim \mathcal{U}\left(\binom{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}{N_b, N_t}\right)$$

où N_t et N_b fixés, $N_t \geq N_b$

Définition du modèle



N_t trous :

$$\boldsymbol{T}^{init} = \{\bigcirc\}$$

N_b balles :

$$\boldsymbol{B}^{init} = \{\bullet, \bullet, \bullet, \dots\}$$

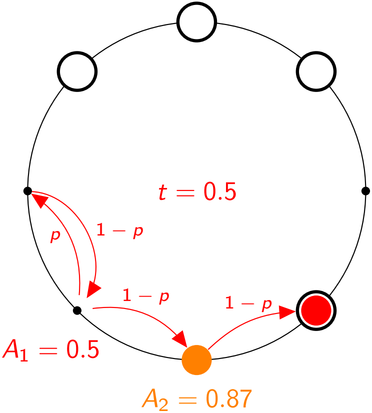
une horloge par balle :

$$\boldsymbol{A}_v \sim \mathcal{U}([0, 1])$$

$$(\boldsymbol{B}^{init}, \boldsymbol{T}^{init}) \sim \mathcal{U}\left(\binom{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}{N_b, N_t}\right)$$

où N_t et N_b fixés, $N_t \geq N_b$

Définition du modèle



N_t trous :

$$\boldsymbol{T}^{init} = \{\bigcirc\}$$

N_b balles :

$$\boldsymbol{B}^{init} = \{\bullet, \bullet, \bullet, \dots\}$$

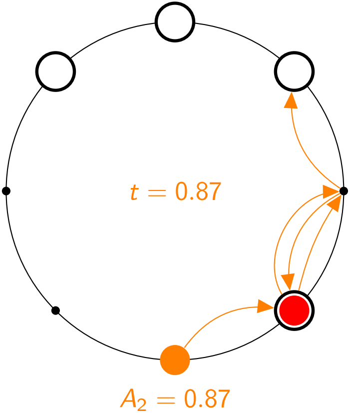
une horloge par balle :

$$\boldsymbol{A}_v \sim \mathcal{U}([0,1])$$

$$(\boldsymbol{B}^{init}, \boldsymbol{T}^{init}) \sim \mathcal{U}\left(\binom{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}{N_b, N_t}\right)$$

où N_t et N_b fixés, $N_t \geq N_b$

Définition du modèle



N_t trous :

$$\boldsymbol{T}^{init} = \{\bigcirc\}$$

N_b balles :

$$\boldsymbol{B}^{init} = \{\text{●}, \text{●}, \text{●}, \dots\}$$

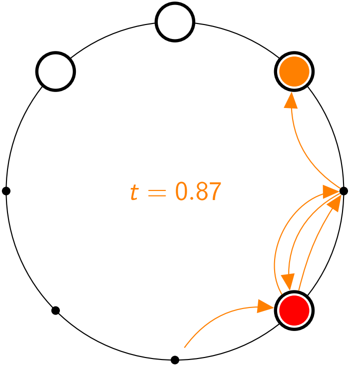
une horloge par balle :

$$\boldsymbol{A}_v \sim \mathcal{U}([0,1])$$

$$(\boldsymbol{B}^{init}, \boldsymbol{T}^{init}) \sim \mathcal{U}\left(\binom{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}{N_b, N_t}\right)$$

où N_t et N_b fixés, $N_t \geq N_b$

Définition du modèle



$A_2 = 0.87$

N_t trous :

$$\boldsymbol{T}^{init} = \{\bigcirc\}$$

N_b balles :

$$\boldsymbol{B}^{init} = \{\bullet, \bullet, \bullet, \ldots\}$$

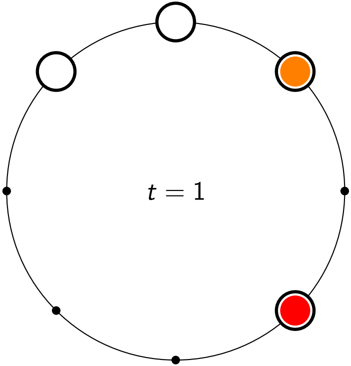
une horloge par balle :

$$\boldsymbol{A}_v \sim \mathcal{U}([0,1])$$

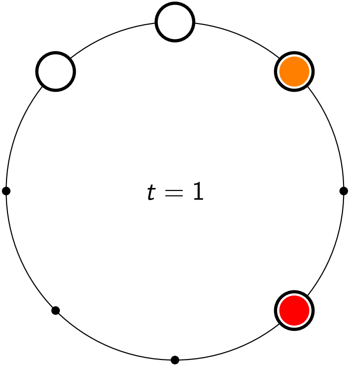
$$(\boldsymbol{B}^{init}, \boldsymbol{T}^{init}) \sim \mathcal{U}\left(\binom{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}{N_b, N_t}\right)$$

où N_t et N_b fixés, $N_t \geq N_b$

Définition du modèle



Définition du modèle



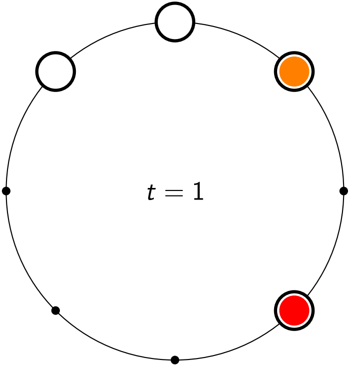
Trous libres :

$$\boldsymbol{T^L} = \left\{ \text{positions des} \quad \text{à } t = 1 \right\}$$

Trous occupés :

$$\boldsymbol{T^O} = \left\{ \begin{array}{c} \text{positions des} \quad , \quad , \dots \\ \text{à } t{=}1 \end{array} \right\}$$

Définition du modèle



Trous libres :

$$\boldsymbol{T^L} = \left\{ \text{positions des } \bigcirc \text{ à } t = 1 \right\}$$

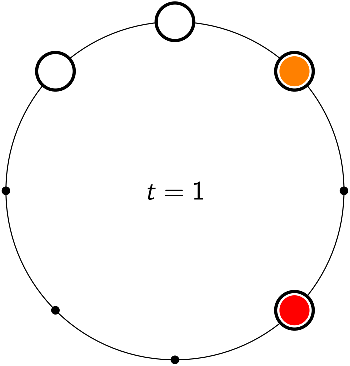
Trous occupés :

$$\boldsymbol{T^O} = \left\{ \underset{\text{à } t=1}{\text{positions des } \bullet, \bullet, \ldots} \right\}$$

Proposition (graphes finis)

La variable aléatoire $\boldsymbol{T^L}$ est bien définie.

Définition du modèle



Trous libres :

$$\boldsymbol{T^L} = \left\{ \text{positions des} \quad \text{à } t = 1 \right\}$$

Trous occupés :

$$\boldsymbol{T^O} = \left\{ \begin{array}{c} \text{positions des} \quad , \quad , \ldots \\ \text{à } t{=}1 \end{array} \right\}$$

Proposition (graphes finis)

La variable aléatoire $\boldsymbol{T^L}$ est bien définie.

Questions

Quelle est la loi de $\boldsymbol{T^L}$?
Et que se passe-t-il si $G = \mathbb{Z}$?

Un peu de contexte : des systèmes de particules

- premier modèle : Diaconis et Fulton [DF91]
- internal diffusion–limited aggregation (IDLA) (Lawler, Bramson, Griffeath [LBG92])
- Activated Random Walk (ARW) ; Diffusion-Limited Annihilating Systems (Cabezas, Rolla, Sidoravicius) ...

Un peu de contexte : des systèmes de particules

- premier modèle : Diaconis et Fulton [DF91]
- internal diffusion–limited aggregation (IDLA) (Lawler, Bramson, Griffeath [LBG92])
- Activated Random Walk (ARW) ; Diffusion-Limited Annihilating Systems (Cabezas, Rolla, Sidoravicius) ...
- processus de parking (Chassaing, Louchard, ...)
- interprétation probabiliste des Remixed Eulerian Numbers (Nadeau, Tewari [NT22])

Une propriété de commutation

Proposition (Diaconis-Fulton [DF91])

Sur un graphe fini, si on fixe O_1 et O_2 deux ordres d'activations des balles, $\boldsymbol{T^L}(O_1) \overset{\mathcal{L}}{=} \boldsymbol{T^L}(O_2)$

Une propriété de commutation

Proposition (Diaconis-Fulton [DF91])

Sur un graphe fini, si on fixe O_1 et O_2 deux ordres d'activations des balles, $\boldsymbol{T^L}(O_1) \overset{\mathcal{L}}{=} \boldsymbol{T^L}(O_2)$

Preuve : changement de point de vue - les collections de piles

- sur chaque sommet : une pile de flèches *partagée par toutes les balles*

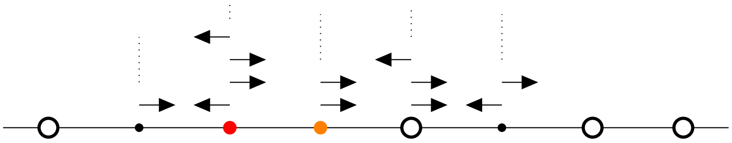
Une propriété de commutation

Proposition (Diaconis-Fulton [DF91])

Sur un graphe fini, si on fixe O_1 et O_2 deux ordres d'activations des balles, $\boldsymbol{T^L}(O_1) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \boldsymbol{T^L}(O_2)$

Preuve : changement de point de vue - les collections de piles

- sur chaque sommet : une pile de flèches *partagée par toutes les balles*



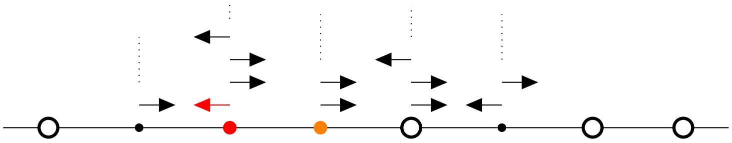
Une propriété de commutation

Proposition (Diaconis-Fulton [DF91])

Sur un graphe fini, si on fixe O_1 et O_2 deux ordres d'activations des balles, $\boldsymbol{T^L}(O_1) \overset{\mathcal{L}}{=} \boldsymbol{T^L}(O_2)$

Preuve : changement de point de vue - les collections de piles

- sur chaque sommet : une pile de flèches *partagée par toutes les balles*



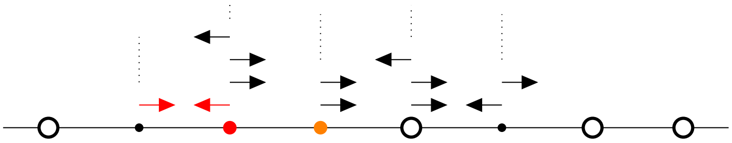
Une propriété de commutation

Proposition (Diaconis-Fulton [DF91])

Sur un graphe fini, si on fixe O_1 et O_2 deux ordres d'activations des balles, $\boldsymbol{T^L}(O_1) \overset{\mathcal{L}}{=} \boldsymbol{T^L}(O_2)$

Preuve : changement de point de vue - les collections de piles

- sur chaque sommet : une pile de flèches *partagée par toutes les balles*



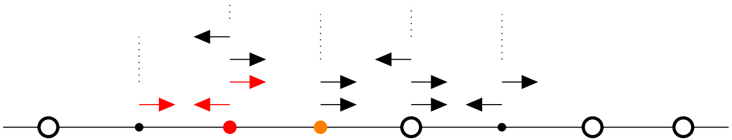
Une propriété de commutation

Proposition (Diaconis-Fulton [DF91])

Sur un graphe fini, si on fixe O_1 et O_2 deux ordres d'activations des balles, $\boldsymbol{T^L}(O_1) \overset{\mathcal{L}}{=} \boldsymbol{T^L}(O_2)$

Preuve : changement de point de vue - les collections de piles

- sur chaque sommet : une pile de flèches *partagée par toutes les balles*



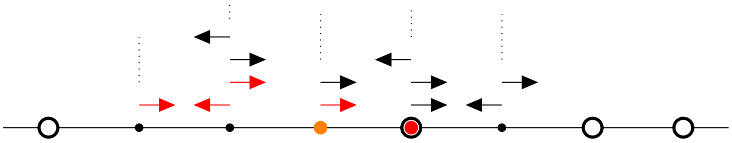
Une propriété de commutation

Proposition (Diaconis-Fulton [DF91])

Sur un graphe fini, si on fixe O_1 et O_2 deux ordres d'activations des balles, $\boldsymbol{T^L}(O_1) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \boldsymbol{T^L}(O_2)$

Preuve : changement de point de vue - les collections de piles

- sur chaque sommet : une pile de flèches *partagée par toutes les balles*



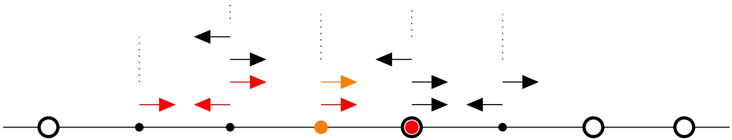
Une propriété de commutation

Proposition (Diaconis-Fulton [DF91])

Sur un graphe fini, si on fixe O_1 et O_2 deux ordres d'activations des balles, $\boldsymbol{T^L}(O_1) \overset{\mathcal{L}}{=} \boldsymbol{T^L}(O_2)$

Preuve : changement de point de vue - les collections de piles

- sur chaque sommet : une pile de flèches *partagée par toutes les balles*



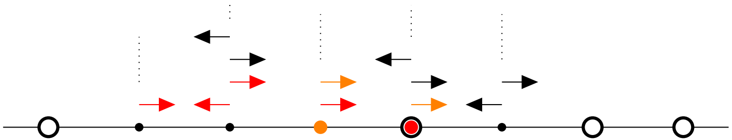
Une propriété de commutation

Proposition (Diaconis-Fulton [DF91])

Sur un graphe fini, si on fixe O_1 et O_2 deux ordres d'activations des balles, $\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{L}}(O_1) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{L}}(O_2)$

Preuve : changement de point de vue - les collections de piles

- sur chaque sommet : une pile de flèches *partagée par toutes les balles*



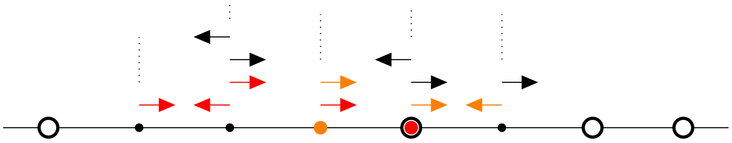
Une propriété de commutation

Proposition (Diaconis-Fulton [DF91])

Sur un graphe fini, si on fixe O_1 et O_2 deux ordres d'activations des balles, $\boldsymbol{T^L}(O_1) \overset{\mathcal{L}}{=} \boldsymbol{T^L}(O_2)$

Preuve : changement de point de vue - les collections de piles

- sur chaque sommet : une pile de flèches *partagée par toutes les balles*



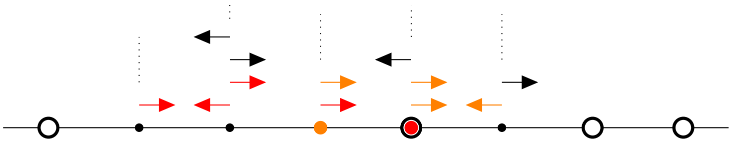
Une propriété de commutation

Proposition (Diaconis-Fulton [DF91])

Sur un graphe fini, si on fixe O_1 et O_2 deux ordres d'activations des balles, $\boldsymbol{T^L}(O_1) \overset{\mathcal{L}}{=} \boldsymbol{T^L}(O_2)$

Preuve : changement de point de vue - les collections de piles

- sur chaque sommet : une pile de flèches *partagée par toutes les balles*



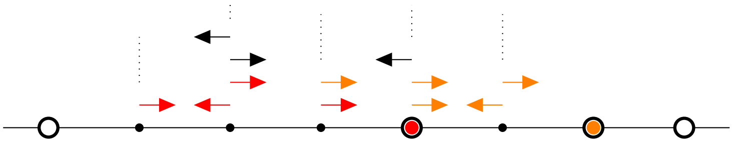
Une propriété de commutation

Proposition (Diaconis-Fulton [DF91])

Sur un graphe fini, si on fixe O_1 et O_2 deux ordres d'activations des balles, $\boldsymbol{T^L}(O_1) \overset{\mathcal{L}}{=} \boldsymbol{T^L}(O_2)$

Preuve : changement de point de vue - les collections de piles

- sur chaque sommet : une pile de flèches *partagée par toutes les balles*



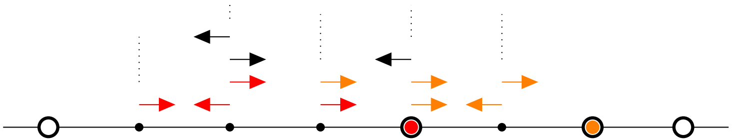
Une propriété de commutation

Proposition (Diaconis-Fulton [DF91])

Sur un graphe fini, si on fixe O_1 et O_2 deux ordres d'activations des balles, $\boldsymbol{T^L}(O_1) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \boldsymbol{T^L}(O_2)$

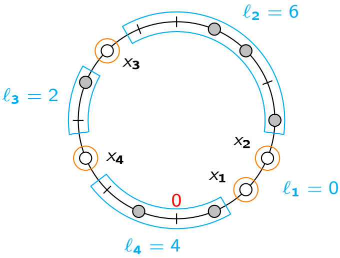
Preuve : changement de point de vue - les collections de piles

- sur chaque sommet : une pile de flèches *partagée par toutes les balles*



- commutation : même ensemble de trous atteints, et même, mêmes flèches utilisées ! $\boldsymbol{T^L}(O_1) = \boldsymbol{T^L}(O_2)$ p.s.

La loi de T^L



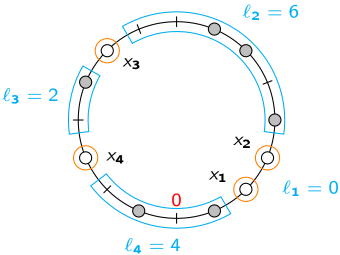
$X = \{x_1, \ldots, x_{N_\ell}\}$, $N_\ell = N_t - N_b$.

$0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_{N_\ell} < n$

$\forall i, \ell_i := (x_{i+1} - x_i - 1) \bmod n$

$\mathbb{P}\left(T^L = X\right) = ?$

La loi de $\boldsymbol{T^L}$



$X = \{x_1, \ldots, x_{N_\ell}\}$, $N_\ell = N_\mathrm{t} - N_\mathrm{b}$.

$0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_{N_\ell} < n$

$\forall i, \ell_i := (x_{i+1} - x_i - 1) \bmod n$

$\mathbb{P}\left(\boldsymbol{T^L} = X\right) = ?$

Théorème (Loi des trous libres)

$$\mathbb{P}^{n,N_\mathbf{b},N_\mathbf{t},p}\left(\boldsymbol{T^L} = X\right) = \frac{1}{\left|C^{n,N_\mathbf{b},N_\mathbf{t}}\right|} \sum \prod_{i=1}^{N_\ell} \frac{1}{b_i + 1} \binom{\ell_i}{b_i, b_i, \ell_i - 2b_i}$$

où la somme porte sur les $(b_i)_{i \in N_\ell}$ tels que $\sum_{i \in N_\ell} b_i = N_\mathrm{b}$, et $\forall i, 2b_i \leq \ell_i$.

Calcul de la loi de $\boldsymbol{T^L}$: **cas monotrou**

cas monotrou : cas particulier où $N_t = N_b + 1$
clé : invariance par rotation

$$\mathbb{P}^{n,N_{\mathbf{b}},N_{\mathbf{b}}+1,p}\left(\boldsymbol{T^L} = \{x\}\right) = \frac{1}{n}$$

Calcul de la loi de $\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{L}}$: **cas monotrou**

cas monotrou : cas particulier où $N_t = N_b + 1$
clé : invariance par rotation

$$\mathbb{P}^{n,N_{\mathbf{b}},N_{\mathbf{b}}+1,p}\left(\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{L}} = \{x\}\right) = \frac{1}{n}$$

Lemme (Loi des trous libres - cas monotrou)

Si $N_t = N_b + 1$, alors pour tout $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$,

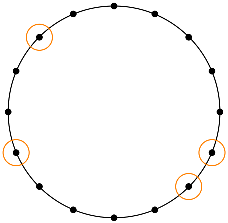
$$\mathbb{P}^{n,N_{\mathbf{b}},N_{\mathbf{b}}+1,p}\left(\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{L}} = \{x\} \middle| x \in \boldsymbol{T}^{init}\right) = \frac{1}{N_t} = \frac{1}{N_b + 1}$$

Calcul de la loi de $\boldsymbol{T^L}$

Preuve du théorème

Supposons que $n = N_t + N_b$. On pose alors $b_i := \ell_i/2$.

$$\mathbb{P}^{n,N_{\mathbf{b}},N_{\mathbf{t}},p}\left(\boldsymbol{T^L} = X\right) =$$

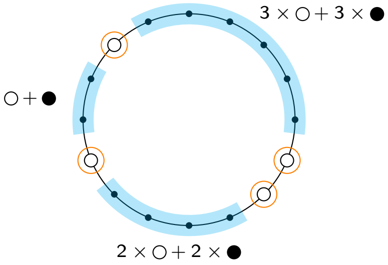


Calcul de la loi de $\boldsymbol{T^L}$

Preuve du théorème

Supposons que $n = N_\mathrm{t} + N_\mathrm{b}$. On pose alors $b_i := \ell_i/2$.

$$\mathbb{P}^{n,N_\mathbf{b},N_\mathbf{t},p}\left(\boldsymbol{T^L} = X\right) =$$

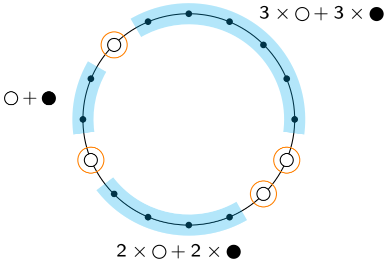


Calcul de la loi de $\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{L}}$

Preuve du théorème

Supposons que $n = N_\text{t} + N_\text{b}$. On pose alors $b_i := \ell_i/2$.

$$\mathbb{P}^{n,N_\mathbf{b},N_\mathbf{t},p}\left(\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{L}} = X\right) = \mathbb{P}\left(\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{L}} = X \,\middle|\, \substack{X \subseteq \boldsymbol{T}^{init} \\ \text{et } \forall i, |\boldsymbol{B}_i| = b_i}\right) \mathbb{P}\left(\substack{X \subseteq \boldsymbol{T}^{init} \\ \text{et } \forall i, |\boldsymbol{B}_i| = b_i}\right)$$

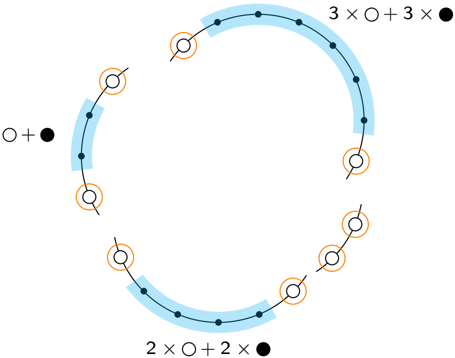


Calcul de la loi de $\boldsymbol{T^L}$

Preuve du théorème

Supposons que $n = N_\mathrm{t} + N_\mathrm{b}$. On pose alors $b_i := \ell_i/2$.

$$\mathbb{P}^{n,N_\mathbf{b},N_\mathbf{t},p}\left(\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{L}} = X\right) = \mathbb{P}\left(\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{L}} = X \,\middle|\, \substack{X \subseteq \boldsymbol{T}^{init} \\ \text{et } \forall i, |\boldsymbol{B}_i| = b_i}\right) \mathbb{P}\left(\substack{X \subseteq \boldsymbol{T}^{init} \\ \text{et } \forall i, |\boldsymbol{B}_i| = b_i}\right)$$

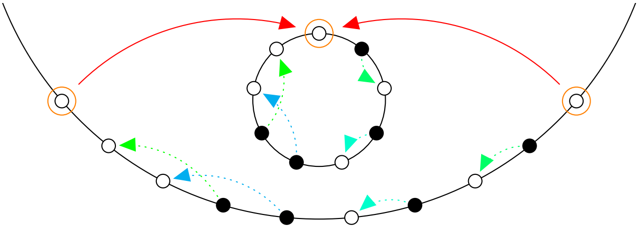


Calcul de la loi de $\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{L}}$

Preuve du théorème

Supposons que $n = N_\mathrm{t} + N_\mathrm{b}$. On pose alors $b_i := \ell_i/2$.

$$\mathbb{P}^{n,N_\mathbf{b},N_\mathbf{t},p}\left(\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{L}} = X\right) = \mathbb{P}\left(\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{L}} = X \,\middle|\, \substack{X \subseteq \boldsymbol{T}^{init} \\ \text{et } \forall i, |\boldsymbol{B}_i| = b_i}\right) \mathbb{P}\left(\substack{X \subseteq \boldsymbol{T}^{init} \\ \text{et } \forall i, |\boldsymbol{B}_i| = b_i}\right)$$



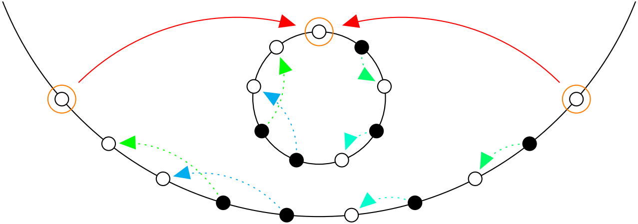
Calcul de la loi de $\boldsymbol{T^L}$

Preuve du théorème

Supposons que $n = N_{\mathrm{t}} + N_{\mathrm{b}}$. On pose alors $b_i := \ell_i/2$.

$$\mathbb{P}^{n,N_{\mathbf{b}},N_{\mathbf{t}},p}\left(\boldsymbol{T^L} = X\right) = \mathbb{P}\left(\boldsymbol{T^L} = X \,\middle|\, \substack{X \subseteq \boldsymbol{T}^{init} \\ \text{et } \forall i, |\boldsymbol{B}_i| = b_i}\right)\mathbb{P}\left(\substack{X \subseteq \boldsymbol{T}^{init} \\ \text{et } \forall i, |\boldsymbol{B}_i| = b_i}\right)$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{N_\ell} \frac{1}{b_i + 1}\right)$$



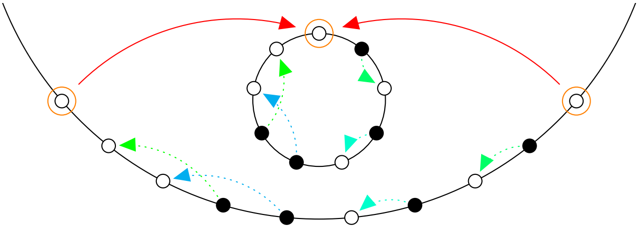
Calcul de la loi de $\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{L}}$

Preuve du théorème

Supposons que $n = N_t + N_b$. On pose alors $b_i := \ell_i/2$.

$$\mathbb{P}^{n,N_{\mathbf{b}},N_{\mathbf{t}},p}\left(\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{L}} = X\right) = \mathbb{P}\left(\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{L}} = X \,\middle|\, \substack{X \subseteq \boldsymbol{T}^{init} \\ \text{et } \forall i, |\boldsymbol{B}_i| = b_i}\right) \mathbb{P}\left(\substack{X \subseteq \boldsymbol{T}^{init} \\ \text{et } \forall i, |\boldsymbol{B}_i| = b_i}\right)$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{N_\ell} \frac{1}{b_i+1}\right) \frac{\prod_{i=1}^{N_\ell} \binom{2b_i}{b_i}}{\binom{n}{N_{\mathbf{t}}}}$$



Calcul de la loi de $\boldsymbol{T^L}$

Preuve du théorème

Supposons que $n = N_t + N_b$. On pose alors $b_i := \ell_i/2$.

$$\mathbb{P}^{n,N_{\mathbf{b}},N_{\mathbf{t}},p}\left(\boldsymbol{T^L} = X\right) = \mathbb{P}\left(\boldsymbol{T^L} = X \,\middle|\, \substack{X \subseteq \boldsymbol{T}^{init} \\ \text{et } \forall i, |\boldsymbol{B}_i| = b_i}\right) \mathbb{P}\left(\substack{X \subseteq \boldsymbol{T}^{init} \\ \text{et } \forall i, |\boldsymbol{B}_i| = b_i}\right)$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{N_\ell} \frac{1}{b_i + 1}\right) \frac{\prod_{i=1}^{N_\ell} \binom{2b_i}{b_i}}{\binom{n}{N_{\mathbf{t}}}}$$

Théorème (Loi des trous libres)

$$\mathbb{P}^{n,N_{\mathbf{b}},N_{\mathbf{t}},p}\left(\boldsymbol{T^L} = X\right) = \frac{1}{|C^{n,N_{\mathbf{b}},N_{\mathbf{t}}}|} \sum \prod_{i=1}^{N_\ell} \frac{1}{b_i + 1} \binom{\ell_i}{b_i, b_i, \ell_i - 2b_i}$$

où la somme porte sur les $(b_i)_{i \in N_\ell}$ tels que $\sum_{i \in N_\ell} b_i = N_{\mathbf{b}}$, et $\forall i, 2b_i \leq \ell_i$.

Définition du modèle sur $\mathbb{Z}$

Configuration initiale

pour chaque sommet u, indépendamment :

- état : balle avec proba d_b XOR trou avec proba d_t, $0 \leq d_\mathrm{b} < d_\mathrm{t}$
- horloge : $\boldsymbol{A}_u \sim \mathcal{U}([0,1])$

Chaque balle trouve-t-elle un trou ?

Définition du modèle sur $\mathbb{Z}$

Configuration initiale

pour chaque sommet u, indépendamment :

- état : balle avec proba d_b XOR trou avec proba d_t, $0 \leq d_b < d_t$
- horloge : $\boldsymbol{A}_u \sim \mathcal{U}([0,1])$

Chaque balle trouve-t-elle un trou ?

La difficulté

- une infinité de balles
- pour tout u, une infinité de v tels que $\boldsymbol{A}_v < \boldsymbol{A}_u$

Première question

Le modèle est-il bien défini ?

Bonne définition du modèle sur $\mathbb{Z}$

Théorème (Cas où $d_b < d_t$)

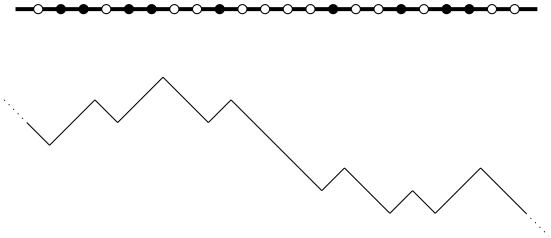
Le modèle sur $\mathbb{Z}$ est bien défini.

Bonne définition du modèle sur $\mathbb{Z}$

Théorème (Cas où $d_b < d_t$)

Le modèle sur $\mathbb{Z}$ est bien défini.

Clé : codage des états

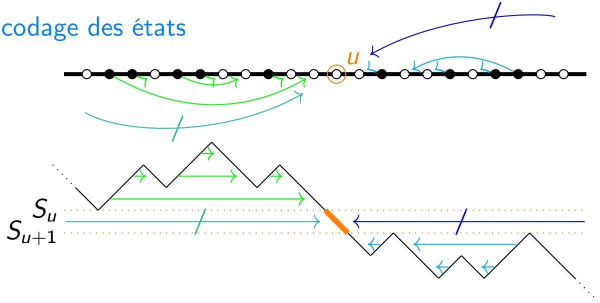


Bonne définition du modèle sur $\mathbb{Z}$

Théorème (Cas où $d_b < d_t$)

Le modèle sur $\mathbb{Z}$ est bien défini.

Clé : codage des états



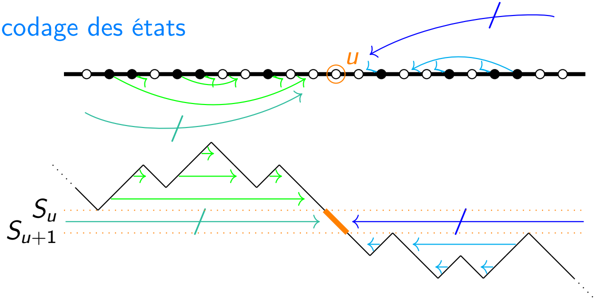
ne voit aucune arête $\Longrightarrow$ u ne reçoit aucune balle

Bonne définition du modèle sur $\mathbb{Z}$

Théorème (Cas où $d_b < d_t$)

Le modèle sur $\mathbb{Z}$ est bien défini.

Clé : codage des états



ne voit aucune arête $\Longrightarrow$ u ne reçoit aucune balle

Proposition

Il existe une infinité de p.s. (à droite et à gauche de tout sommet).

La loi de $\boldsymbol{T^L}$ sur $\mathbb{Z}$

On note $\left(\Delta_i \boldsymbol{T^L}\right)_{i\in\mathbb{Z}}$ le processus qui indexe les distances inter-trous libres. (ici $d_{\mathrm{b}} + d_{\mathrm{t}} = 1$ et $d_{\mathrm{b}} < d_{\mathrm{t}}$)

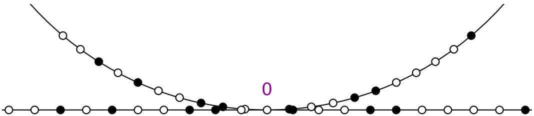
Théorème

Il existe $\mathcal{G}, \mathcal{H}, \lambda$ et $\left(\boldsymbol{L}_i^{(\lambda)}\right)_{i\in\mathbb{Z}}$ (explicites) tels que pour tout $R > 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\Delta_i \boldsymbol{T^L} = 2b_i, -R \leq i \leq R\right) &= \frac{(2b_0+1)\lambda^{2b_0} C_{b_0}}{\mathcal{H}(\lambda)} \prod_{i=-R, i\neq 0}^{R} \frac{\lambda^{2b_i} C_{b_i}}{\mathcal{G}(\lambda)} \\ &= \prod_{i=-R}^{R} \mathbb{P}\left(\boldsymbol{L}_i^{(\lambda)} = 2b_i\right)\end{aligned}$$

Idée générale de la preuve du théorème

Clé de la preuve : couplage avec le cercle, $\frac{N_{\mathbf{b}}(n)}{n} \to d_{\mathbf{b}}$, $\frac{N_{\mathbf{t}}(n)}{n} \to d_{\mathbf{t}}$

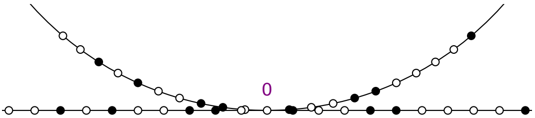


Avec grande probabilité, et pour n assez grand :

- **Environnement local suffisant** : les $\left(\Delta_i \boldsymbol{T^L}\right)_{-R\leq i\leq R}$, $\left(\Delta_i \boldsymbol{T^{L^{(n)}}}\right)_{-R\leq i\leq R}$ ne dépendent que de la configuration initiale sur $[-M_R, M_R]$.

Idée générale de la preuve du théorème

Clé de la preuve : couplage avec le cercle, $\frac{N_{\mathbf{b}}(n)}{n} \to d_{\mathrm{b}}$, $\frac{N_{\mathbf{t}}(n)}{n} \to d_{\mathrm{t}}$

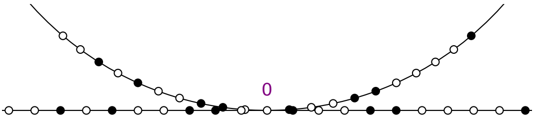


Avec grande probabilité, et pour n assez grand :

- **Environnement local suffisant** : les $\left(\Delta_i \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{L}}\right)_{-R\leq i\leq R}, \left(\Delta_i \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{L}(n)}\right)_{-R\leq i\leq R}$ ne dépendent que de la configuration initiale sur $[-M_R, M_R]$.
- **couplage des configurations locales initiales sur $\mathbb{Z}$ et sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$**

Idée générale de la preuve du théorème

Clé de la preuve : couplage avec le cercle, $\frac{N_{\mathbf{b}}(n)}{n} \to d_{\mathrm{b}}$, $\frac{N_{\mathbf{t}}(n)}{n} \to d_{\mathrm{t}}$



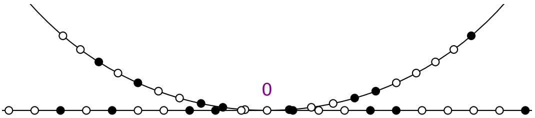
Avec grande probabilité, et pour n assez grand :

- **Environnement local suffisant** : les $\left(\Delta_i \boldsymbol{T^L}\right)_{-R\leq i\leq R}, \left(\Delta_i \boldsymbol{T^{L^{(n)}}}\right)_{-R\leq i\leq R}$ ne dépendent que de la configuration initiale sur $[-M_R, M_R]$.
- **couplage des configurations locales initiales sur $\mathbb{Z}$ et sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$**
- **couplage des flèches**

$\Longrightarrow \quad \Delta_i \boldsymbol{T^L} = \Delta_i \boldsymbol{T^{L^{(n)}}}, \; -R \leq i \leq R$

Idée générale de la preuve du théorème

Clé de la preuve : couplage avec le cercle, $\frac{N_{\mathbf{b}}(n)}{n} \to d_{\mathbf{b}}$, $\frac{N_{\mathbf{t}}(n)}{n} \to d_{\mathbf{t}}$



Avec grande probabilité, et pour n assez grand :

- **Environnement local suffisant** : les $\left(\Delta_i \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{L}}\right)_{-R\leq i\leq R}$, $\left(\Delta_i \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{L}(n)}\right)_{-R\leq i\leq R}$ ne dépendent que de la configuration initiale sur $[-M_R, M_R]$.
- **couplage des configurations locales initiales sur $\mathbb{Z}$ et sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$**
- **couplage des flèches**

$\Longrightarrow$ $\Delta_i \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{L}} = \Delta_i \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{L}(n)}, \; -R \leq i \leq R$

- conclusion en calculant :

$$\mathbb{P}\left(\Delta_i \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{L}(n)} = 2b_i, -R \leq i \leq R-1\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \prod_{i=-R}^{R-1} \mathbb{P}(\boldsymbol{L}_i^{(\lambda)} = 2b_i)$$

Résultat final

Théorème

Il existe $\mathcal{G}, \mathcal{H}, \lambda$ et $\left(\boldsymbol{L}_i^{(\lambda)}\right)_{i\in\mathbb{Z}}$ (explicites) tels que pour tout $R > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\Delta_i \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{L}} = 2b_i, -R \leq i \leq R\right) = \prod_{i=-R}^{R} \mathbb{P}\left(\boldsymbol{L}_i^{(\lambda)} = 2b_i\right)$$

Bilan et travail en cours

- Extension sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
  - plusieurs balles par sommets : ok
  - trous à capacité plus grande que 1 ?
- théorèmes limites sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (distances maximales entre deux trous libres)
- calcul de la distance parcourue par une balle ? (asymptotique dans [PRS19])

Références

Persi Diaconis and William Fulton, *A growth model, a game, an algebra, Lagrange inversion, and characteristic classes*, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino **49** (1991), no. 1, 95–119.

Gregory F Lawler, Maury Bramson, and David Griffeath, *Internal diffusion limited aggregation*, The Annals of Probability (1992), 2117–2140.

Philippe Nadeau and Vasu Tewari, *Remixed eulerian numbers*, 2022.

Michał Przykucki, Alexander Roberts, and Alex Scott, *Parking on the integers*, arXiv preprint arXiv :1907.09437 (2019).

Petite parenthèse : que se passe-t-il pour T^O ?

On sait faire le calcul exact de la loi avec Maple :

```
b := 2: t := 3: v := 1: n := b+t+v:
c :=  1/(binomial(n,b))/ binomial(t+v,t):
muT0 := c*add(finalstatefocus3(s,p,n), s in Park(v,b,t)):
etatsfinauxT0 := Park_fin(t+v,0,b):

LoiT0 := {seq( {factor(expand(diff(muT0,X[rep4(sfin)]))),rep4(sfin)} ,sfin in etatsfinauxT0 )};
```

$$LoiTO := \left\{\left\{\frac{16\,p^6-48\,p^5+67\,p^4-54\,p^3+29\,p^2-10\,p+2}{30\,(2\,p^2-2\,p+1)\,(p^4-2\,p^3+4\,p^2-3\,p+1)}, [0,0,3,0,0,3]\right\}, \left\{-\frac{p^8-4\,p^7-26\,p^6+92\,p^5-144\,p^4+130\,p^3-73\,p^2+24\,p-4}{60\,(p^4-2\,p^3+4\,p^2-3\,p+1)\,(2\,p^2-2\,p+1)\,(p^2-p+1)}, [0,0,0,3,0,3]\right\}, \left\{\frac{5\,p^8-20\,p^7+53\,p^6-89\,p^5+116\,p^4-107\,p^3+66\,p^2-24\,p+4}{60\,(p^4-2\,p^3+4\,p^2-3\,p+1)\,(2\,p^2-2\,p+1)\,(p^2-p+1)}, [0,0,0,0,3,3]\right\}\right\}$$