

Informatique Théorique 1 : Examen

18 décembre 2007, 11h00—12h30 ; durée 1h30 ; sans documents
Responsable : Alexandre Zvonkine

I. Ordres

Normalement, on écrit les polynômes d'une variable en ordre *décroissant* des degrés de leurs monômes, comme cela : $x^5 - 2x^3 - x^2 + 4x + 7$. Pour les polynômes de plusieurs variables, l'ordre des monômes doit être explicité plus clairement : il devient important pour les systèmes de calcul formel. Les trois ordres suivants sont souvent utilisés (pour simplifier, nous considérons les polynômes de trois variables) :

1. **Lexicographique** : un monôme $x^{m_1}y^{n_1}z^{k_1}$ est “plus grand” que le monôme $x^{m_2}y^{n_2}z^{k_2}$ (et donc le premier monôme doit apparaître avant le deuxième dans une écriture d'un polynôme) si $m_1 > m_2$, ou $m_1 = m_2$ mais $n_1 > n_2$, ou $m_1 = m_2$ et $n_1 = n_2$ mais $k_1 > k_2$.
2. **Lexicographique gradué** : un monôme $x^{m_1}y^{n_1}z^{k_1}$ est “plus grand” que le monôme $x^{m_2}y^{n_2}z^{k_2}$ si $m_1 + n_1 + k_1 > m_2 + n_2 + k_2$, ou si $m_1 + n_1 + k_1 = m_2 + n_2 + k_2$ mais le premier monôme est plus grand que le deuxième en ordre lexicographique.
3. **Lexicographique gradué “renversé”** : un monôme $x^{m_1}y^{n_1}z^{k_1}$ est “plus grand” que le monôme $x^{m_2}y^{n_2}z^{k_2}$ si $m_1 + n_1 + k_1 > m_2 + n_2 + k_2$, ou si $m_1 + n_1 + k_1 = m_2 + n_2 + k_2$ mais une des conditions suivantes est vraie : $k_1 < k_2$, ou $k_1 = k_2$ mais $n_1 < n_2$.

Exercice 1. Soient deux polynômes suivants :

$$P = 4z^2 + 7x^2z^2 + 2xyz^2 + 5x^3 + 4xy^2z ;$$

$$Q = 2x^2y^8 - 3x^5yz^4 + xyz^3 - xy^4 .$$

Écrire les polynômes P et Q selon les trois ordres de monômes. (Chaque polynôme doit donc être réécrit trois fois.)

Exercice 2. Parmi les trois ordres ci-dessus, lesquels sont totaux ? Lesquels sont bien fondés ?

II. Langages et automates

Exercice 3. Construire un automate fini, déterministe et complet reconnaissant le langage sur l'alphabet $A = \{a, b, c\}$ qui se compose des mots ne contenant pas de facteur $abac$.

Exercice 4. Donner deux exemples des suites de langages, L_1, L_2, L_3, \dots et M_1, M_2, M_3, \dots , pour lesquelles les propriétés suivantes sont vraies :

1. Les langages L_1, L_2, L_3, \dots sont rationnels mais leur union

$$L = \bigcup_{i=1}^{\infty} L_i$$

n'est pas un langage rationnel.

2. Les langages M_1, M_2, M_3, \dots sont rationnels mais leur intersection

$$M = \bigcap_{i=1}^{\infty} M_i$$

n'est pas un langage rationnel.

III. Logique

Exercice 5. Vérifier que les formules suivantes sont des tautologies :

$$\begin{aligned} & ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p; \\ & (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p). \end{aligned}$$

Exercice 6. Nous avons à notre disposition les trois fonctions booléennes suivantes :

- addition modulo 2, notée $x + y$;
- multiplication, notée xy ;
- la constante 1 (elle peut être considérée comme une fonction de zéro variables).

Exprimer, à l'aide de ces trois fonctions, les fonctions

$$\neg x, \quad x \wedge y, \quad x \vee y, \quad x \rightarrow y.$$

FIN DE L'ÉNONCÉ