

Probabilités et Combinatoire : Examen

Corrigé

25 avril 2016, 14h00–17h00 ; durée 3 heures

Sont autorisées : calculatrices de poche ; tables de la loi Gaussienne ;
une feuille manuscrite recto-verso avec des formules

Barème total est sur 24 points

Responsable : Alexandre Zvonkine

Exercice 1 (/2) Une urne contient 4 boules rouges, 5 boules vertes et 6 boules bleues. Quel est le nombre de sous-ensembles contenant 4 boules et tels que toutes les trois couleurs soient présentes ?

Corrigé. Première solution :

$$C_4^2 \cdot C_5^1 \cdot C_6^1 + C_4^1 \cdot C_5^2 \cdot C_6^1 + C_4^1 \cdot C_5^1 \cdot C_6^2 = 6 \cdot 5 \cdot 6 + 4 \cdot 10 \cdot 6 + 4 \cdot 5 \cdot 15 = 720.$$

Deuxième solution : choisissons d'abord une boule de chaque couleur : il y a $4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$ possibilités. Choisissons maintenant une boule arbitraire parmi les 12 boules restantes : $120 \cdot 12 = 1440$. Chaque choix a été compté deux fois (pour deux boules de la même couleur, on peut d'abord choisir a puis b ou d'abord b puis a) : $1440/2 = 720$.

Exercice 2 (/2) Montrer l'identité suivante

$$\sum_{k=0}^n C_{2n}^k \cdot C_{3n}^{n-k} = C_{5n}^n.$$

en lui donnant une interprétation combinatoire.

Corrigé. On subdivise l'ensemble de $5n$ éléments en deux sous-ensembles, de $2n$ et de $3n$ éléments respectivement. Pour choisir n éléments sur $5n$, on choisit k éléments du premier sous-ensemble et $n - k$ éléments du deuxième, et ceci pour tout $k = 0, 1, \dots, n$.

Exercice 3 (/3) Utiliser la formule de Stirling pour trouver une formule asymptotique pour le coefficient binomial C_{5n}^n . Représenter cette formule asymptotique sous forme

$$C_{5n}^n \sim C \cdot R^n \cdot n^{-\alpha}$$

et trouver explicitement les constantes C , R , α . Estimer le nombre de chiffres du coefficient binomial C_{5n}^n pour $n = 100$.

Corrigé. $C = \sqrt{5/8\pi}$, $R = 5^5/4^4$, $\alpha = 1/2$. Par conséquent,

$$\log_{10}(C_{500}^{100}) \approx \log_{10}(C) + 100 \log_{10}(R) - (1/2) \log_{10}(100) = 107.31037\dots$$

d'où le nombre C_{500}^{100} doit contenir 108 chiffres.

Notons que si on calcule la valeur exacte de C_{500}^{100} , sans utiliser la formule de Stirling, puis on en prend le \log_{10} , on obtient 107.3099907...

Exercice 4 (/2) Soit la suite définie par la récurrence linéaire

$$a_0 = 2, \quad a_1 = 1, \quad a_n = 3a_{n-1} + 2a_{n-2} \quad \text{pour } n \geq 2.$$

Trouver la fonction génératrice pour cette suite.

Corrigé. $f(x) = \frac{2 - 5x}{1 - 3x - 2x^2}$.

Exercice 5 (/3) Soit l'équation $x^2 - 3y^2 = 1$ qu'il faut résoudre en nombres entiers positifs. Montrer que si (x_n, y_n) est une solution de cette équation, alors (x_{n+1}, y_{n+1}) obtenue par la récursion suivante

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

est aussi une solution.

On admet sans preuve que toutes les solutions de cette équation s'obtiennent de cette manière à partir de la solution initiale $(x_0, y_0) = (1, 0)$.

1. Trouver (x_1, y_1) et (x_2, y_2) et vérifier que ce sont effectivement des solutions.
2. Proposer un algorithme efficace pour trouver une n -ième solution.

Corrigé. $(x_1, y_1) = (7, 4)$, $(x_2, y_2) = (97, 56)$. Un algorithme efficace de calcul de (x_n, y_n) se réduit au calcul de A^n où

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Rappelons que la complexité de calcul des puissances est $O(\log n)$.

Exercice 6 (/3) Il y a trois urnes A , B et C . L'urne A contient 3 boules blanches et 5 boules noires; l'urne B contient 4 boules blanches et 4 boules noires; l'urne C contient 5 boules blanches et 3 boules noires. On choisit au hasard une des trois urnes, puis, toujours au hasard, on tire deux boules à partir de l'urne choisie. Le résultat du tirage est : deux boules blanches. Quelle est la probabilité que l'urne choisie ait été A ? Même question pour les urnes B et C .

Corrigé. Les probabilités sont, respectivement, 3/19, 6/19, 10/19.

Exercice 7 (/2) On fait $n = 1600$ expériences indépendantes avec la probabilité de succès $p = 1/5$. Quelle est la probabilité que le nombre de succès se trouve entre 300 et 340 ?

Corrigé. Soit $X = \sum_{i=1}^n X_i$ où $n = 1600$ et

$$X_i = \begin{cases} 1 & 1/5 \\ 0 & 4/5 \end{cases}$$

Alors $E(X_i) = 1/5$, $\sigma(X_i) = \sqrt{(1/5) \cdot (4/5)} = 2/5$, d'où

$$E(X) = 1600 \cdot \frac{1}{5} = 320, \quad \sigma(X) = \frac{2}{5} \cdot \sqrt{1600} = \frac{2}{5} \cdot 40 = 16.$$

On a $20/16 = 1.25$; la probabilité que l'on cherche est donc égale à la

$$\text{Prob}(-1.25 \leq \mathcal{N} \leq 1.25)$$

où \mathcal{N} est la variable gaussienne standard. En utilisant table nous trouvons

$$0.8944 - 0.1056 = 0.7888.$$

Exercice 8 (/2) On fait $n = 240$ expériences indépendantes avec la probabilité de succès $p = 1/100$. Soit X le nombre de succès. Trouver les probabilités que $X = 0, 1, 2, 3$ et $X \geq 4$.

Corrigé. La loi limite est celle de Poisson avec $\lambda = 240 \cdot \frac{1}{100} = 2.4$. On a $e^{-\lambda} = 0.0907$, d'où

$$p_0 = e^{-\lambda} = 0.0907, \quad p_1 = e^{-\lambda} \cdot \lambda = 0.2174, \quad p_2 = e^{-\lambda} \cdot (\lambda^2/2!) = 0.2613,$$

$$p_3 = e^{-\lambda} \cdot (\lambda^3/3!) = 0.2090, \quad p_{X \geq 4} = 1 - (p_0 + p_1 + p_2 + p_3) = 0.2213.$$

Exercice 9 (/2) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et réparties selon la loi uniforme sur le segment $[0, 1]$. Trouver la probabilité conditionnelle

$$P(X^2 + Y^2 \leq 1 | Y \geq X).$$

Corrigé.

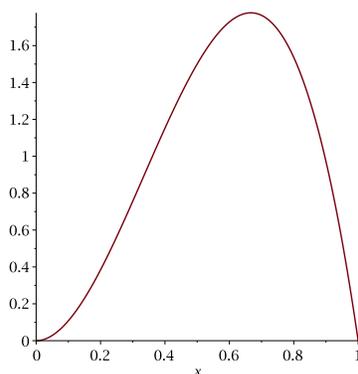
$$\frac{\pi/8}{1/2} = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 10 (/3) Soit X une variable aléatoire continue de densité

$$\varphi(x) = \begin{cases} a(x^2 - x^3) & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Dessiner le graphe de la fonction $\varphi(x)$. Quelle doit être la valeur du paramètre a pour que φ soit vraiment une densité?
Dans la suite, on suppose que a prend cette valeur.
2. Calculer l'espérance $E(X)$.
3. Calculer la variance $\text{Var}(X)$.

Corrigé.



$$\int_0^1 (x^2 - x^3) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}, \quad \text{donc } a = 12.$$

$$E(X) = 12 \int_0^1 x(x^2 - x^3) = 12 \cdot \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 = 12 \cdot \frac{1}{20} = \frac{3}{5}.$$

$$E(X^2) = 12 \int_0^1 x^2(x^2 - x^3) = 12 \cdot \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} \right) \Big|_0^1 = 12 \cdot \frac{1}{30} = \frac{2}{5}.$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{2}{5} - \left(\frac{3}{5} \right)^2 = \frac{10}{25} - \frac{9}{25} = \frac{1}{25}.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{1}{5}.$$