

## TD — feuille 3

### Exercices divers

#### I. Probabilité géométrique

**Exercice 1** Deux duellistes se sont mis d’accord pour que chacun d’entre eux vienne à l’endroit du duel à un moment aléatoire entre 17h et 18h. Lorsqu’un duelliste arrive, il attend cinq minutes, et si son adversaire n’est pas là au bout des 5 minutes, il part. Quelle est la probabilité que le duel ait lieu ?

**Exercice 2** On jette au hasard deux points sur le segment  $[0, 1]$ . Ces points subdivisent le segment  $[0, 1]$  en trois morceaux. Quelle est la probabilité que l’on puisse former un triangle dont les côtés sont égaux aux trois morceaux ainsi obtenus ?

**Exercice 3** On veut approximer le nombre  $\pi$  à l’aide de tirages aléatoires. Pour cela, on jette deux variables aléatoires indépendantes  $X$  et  $Y$  distribuées uniformément sur le segment  $[-1, 1]$ , et on enregistre un “succès” si  $X^2 + Y^2 \leq 1$ .

1. Quel rapport avec  $\pi$  ?
2. Combien de fois faut-il répéter cette expérience pour que l’erreur de l’estimation de  $\pi$  ne dépasse pas 0.01 avec la probabilité 95% ?

Indication : Pour répondre à la question 2, utiliser les tables de la loi Gaussienne (et les calculatrices).

#### II. Divers

**Exercice 4** On lance une pièce de monnaie  $2n$  fois. Utiliser la formule de Stirling

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \frac{n^n}{e^n}$$

pour trouver une valeur approchée de la probabilité d’obtenir *exactement*  $n$  piles et  $n$  faces.

**Exercice 5** Soit  $X$  une variable aléatoire continue de densité

$$\varphi(x) = \begin{cases} ax(1-x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Dessiner le graphe de la fonction  $\varphi(x)$ . Quelle doit être la valeur du paramètre  $a$  pour que  $\varphi$  soit vraiment une densité ?  
Dans la suite, on suppose que  $a$  prend cette valeur.
2. Calculer la fonction de répartition de  $X$ .
3. Calculer l'espérance de  $X$ .
4. Calculer la probabilité conditionnelle  $P(X > 3/4 \mid X > 1/4)$ .

**Exercice 6** Dans un quartier, il y a 600 habitants ; dans un collège avoisinant, il y a 300 élèves. Chaque élève envoie une carte postale à un habitant du quartier choisit au hasard. Soit  $X$  le nombre de cartes reçues par une personne donnée.

- Expliquer pourquoi la loi de Poisson est une bonne approximation pour la loi de distribution de la variable aléatoire  $X$ . Quel est la valeur du paramètre  $\lambda$  ?
- Calculer les probabilités que  $X = 0$ ,  $X = 1$ ,  $X = 2$ ,  $X = 3$ , et  $X \geq 4$ . (Il est conseillé de faire le calcul avec 6 chiffres après la virgule.)

**Exercice 7** Quel est le nombre moyen de passages par des arcs du graphe montré sur la figure pour arriver du point  $A$  au point  $D$  si pour chaque sommet on choisit une sortie de manière équiprobable ?

